ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА



КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Данная манга рассказывает о том, как студент Юта Сакурай, которого отправили на переэкзаменовку, познакомился с королевой математики госпожой Химуро, но не превратился в камень от страха! Если уж сама королева объясняет тебе, зачем нужны комплексные числа, – ты точно не забудешь про формулу Эйлера и мнимую единицу. А если ты вдруг опоздал на урок, Химуро охотно примет извинения вместо цветов – попроси только рассказать про полярную систему координат.

Цель книги – заинтересовать школьников, студентов и просто пытливых читателей этим особенным разделом математики, а также показать использование комплексных чисел на практике.

Интернет-магазин: www.dmkpress.com
Книга – почтой: orders@alians-kniga.ru
Оптовая продажа: "Альянс-книга"
(499)782-3889, books@alians-kniga.ru

ДМК ПРЕСС
ИЗДАТЕЛЬСТВО
www.дмк.рф

ISBN 978-5-97060-689-6

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА МАНГА

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Масаси Оучи
Тои Ишино



ДМК ПРЕСС
ИЗДАТЕЛЬСТВО
Ohmsha

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА



Масаси Оучи
Тои Ишино
TREND-PRO Co., Ltd.

Занимательная математика

Комплексные числа

Манга

マンガでわかる

虚数・複素数

相知 政司／著　石野 人衣／作画　トレンド・プロ／制作



Ohmsha

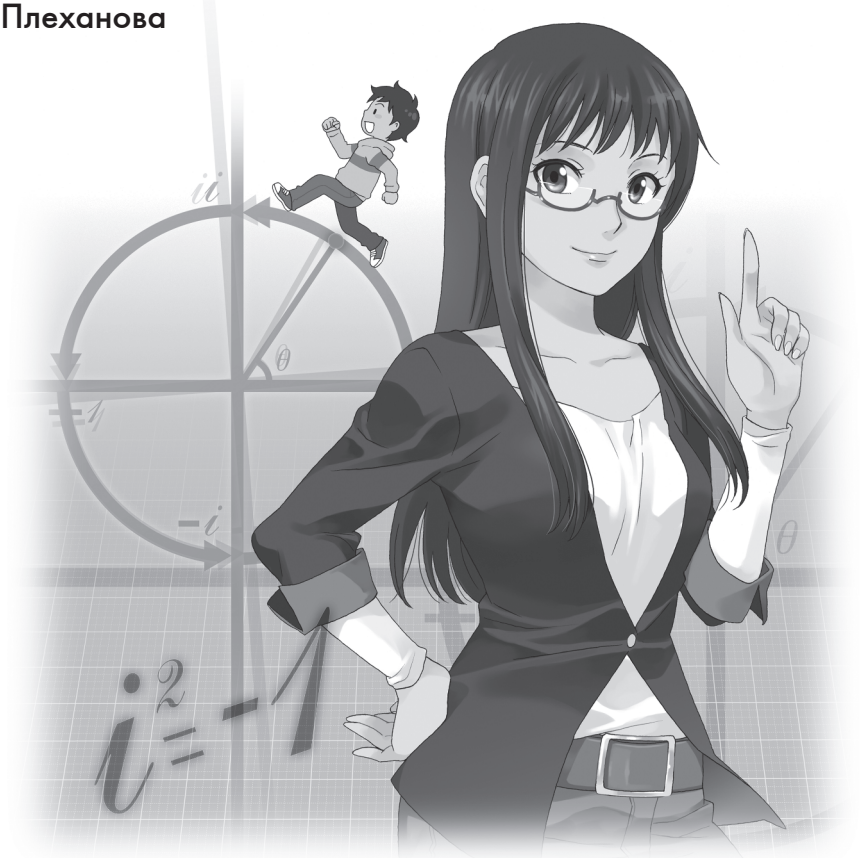
ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА

занимательная математика

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Масаси Оучи
Художник Тои Ишино

Перевод
С.Л. Плеханова



ДМК ПРЕСС
издательство

Москва
ДМК Пресс, 2019

УДК 519.63
ББК 22.193
О 90

Оучи М.

О 90 Занимательная математика. Комплексные числа / Масаси Оучи (автор), Тои Ишино (худ.); пер. с яп. С. Л. Плехановой. — М.: ДМК Пресс, 2019. — 234 с.: ил. — (Серия «Образовательная манга»). — Доп. тит. л. яп.

ISBN 978-5-97060-689-6

Эта серьезная манга рассказывает о том, как студент Юта Сакурай, которого отправили на переэкзаменовку по математике, познакомился с королевой математики госпожой Химуро, но не превратился в камень от страха. Если уж сама королева объясняет тебе, зачем нужны комплексные числа, – ты точно не забудешь про формулу Эйлера и мнимую единицу. А если ты вдруг опоздал на урок – королева математики охотно примет извинения вместо цветов, если ты попросишь ее рассказать про полярную систему координат.

Мнимое число, по-английски Imaginary number, – число, созданное воображением, а это очень полезное качество для будущих инженеров. Комплексные числа являются мощным инструментом для расчёта колебаний силы тока и напряжения в электрических цепях, особенно для переменного тока, так что они очень нужны всем студентам электротехнических специальностей.

Цель книги – заинтересовать школьников, студентов и просто пытливых читателей этим особенным разделом математики и показать практическое применение комплексных чисел в различных практических расчетах.

УДК 519.63
ББК 22.193

Manga de Wakaru Kyosuu Fukusosuu (Manga Guide: Complex Numbers)
By Masashi Ohchi(Author),
Illustration by Toi Ishino (Illustrator),
Produced by TREND-PRO Co., Ltd.
Russian language edition copyright © 2018 by DMK Press.

Все права защищены. Никакая часть этого издания не может быть воспроизведена в любой форме или любыми средствами, электронными или механическими, включая фотографирование, ксерокопирование или иные средства копирования или сохранения информации, без письменного разрешения издательства.

ISBN 978-4-274-06823-2 (яп.) Copyright © 2010 by Masashi Ohchi and TREND-PRO Co., Ltd.
ISBN 978-5-97060-689-6 (рус.) © Перевод, оформление, издание, ДМК Пресс, 2019

ПРЕДИСЛОВИЕ

С недавних пор обучение в высших учебных заведениях стало менее строгим, и я слышал, что бывают студенты электротехнических факультетов, которые плохо понимают работу электрических цепей. И я сам, преподавая в университете как раз на подобном факультете, сталкивался со студентами, которые не могут решить простых задач, связанных с электрическими цепями. И я стал думать, как же решить эту проблему. Я не смог найти никакого магического средства, но понял, что многие студенты, не понимающие электрических цепей, не понимают комплексных чисел. И тогда, посоветовавшись с издательством Ohmsha, мы решили сделать эту книгу.

Мнимое число, по-английски Imaginary number, – это число, созданное воображением. При этом почему-то по-русски оно называется «мнимым», и это название вызывает не самые хорошие ассоциации. Но разве числа, называемые действительными, при этом существуют в реальном мире? Люди придумали числа, но природные явления до чисел и после их появления одинаковы. Просто с помощью чисел и формул люди описывают явления природы, чтобы лучше их понять.

Итак, комплексные числа являются мощным инструментом для расчёта колебаний силы тока и напряжения в электрических цепях, особенно для переменного тока. А поскольку на электротехнических факультетах изучают в основном переменный ток, то если студент не умеет представлять напряжение и силу тока в виде комплексных чисел, то он не сможет получать хорошие оценки. Кроме того, есть и множество других специализаций, так или иначе связанных с электричеством, то есть и на квалификационных экзаменах других факультетов часто попадаются задачи по переменному току, для решения которых нужно использовать мнимые и комплексные числа.

Моя цель – чтобы эту книгу в качестве руководства по мнимым и комплексным числам прочитало как можно больше людей. И если кто-то из них после прочтения будет лучше разбираться в комплексных числах, почувствует интерес к решению задач по электрическим цепям с использованием мнимых и комплексных чисел, я буду счастлив.

Я хочу поблагодарить за помощь и советы по работе над книгой всех сотрудников отдела по развитию издательства Ohmsha, сделавших интересными и понятными мою скучную рукопись господина Нагакава Наруки и господина Исино Тои, а также всех сотрудников TREND-PRO.

И в заключение хочу подчеркнуть, что эта книга не является профессиональным руководством, и с точки зрения математики в ней, возможно, появляются не совсем корректные выражения. Но главной задачей этой книги было дать простое и наглядное объяснение для начинающих, что из себя представляют комплексные и мнимые числа. И именно это ставилось во главу угла.

Ноябрь 2010 *Оучи Масаси*

СОДЕРЖАНИЕ

Пролог. НАЧАЛО ИСТОРИИ 1

1. ВИДЫ ЧИСЕЛ 13

1. ВИДЫ ЧИСЕЛ 17
   ОБЫКНОВЕННЫЕ И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ 18
   ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА 19
   ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА 20
2. ФОРМУЛА РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ 22
3. ВВЕДЯ МНИМУЮ ЕДИНИЦУ i, МОЖНО РЕШИТЬ ЛЮБОЕ КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ 28
4. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ 34
5. ВЫВЕДЕНИЕ ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ 36
6. ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ 38

2. ОТ МНИМОЙ ЕДИНИЦЫ i К КОМПЛЕКСНОМУ ЧИСЛУ $a + bi$ 41

1. ПЕРЕХОД К КОМПЛЕКСНЫМ ЧИСЛАМ 45
2. СВОЙСТВА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ (МОДУЛЬ, АРГУМЕНТ) И КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ 48
3. ОСНОВНЫЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ 57
4. ИЗОБРАЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ . . . 60
5. СОПРЯЖЁННЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА 63
6. УПРАЖНЕНИЯ 71

3. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ 77

1. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ И ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ 82
2. УПРАЖНЕНИЯ 91

4. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА, СВЯЗЫВАЮЩАЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНУЮ ФУНКЦИЮ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА 97

1. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА 98

2. Число Непера (основание натурального логарифма) e 102
3. Доказательство формулы Эйлера 106
4. Формула Муавра 109
5. Экспоненциальная форма комплексного числа 110
6. Определение производной и дифференцирование функции e^x 113
7. Пример практического использования числа e 115

5. Формула Эйлера и тригонометрические формулы сложения 119

1. Тригонометрические формулы сложения 124
2. Выведение тригонометрических формул сложения 128
3. Упражнения 133

6. Свойства комплексных чисел. Умножение и деление. Полярная система координат. 139

1. Умножение комлексных чисел 143
2. Деление комплексных чисел 151
3. Значения тригонометрических функций для разных углов, представленных в градусной и радианной мерах 157
4. Основные формулы и свойства степеней. 158
5. Логарифмическая функция 159
6. Почему $(-1)\cdot(-1) = 1$? 161

7. Практическое применение комплексных чисел. 163

1. Переменный ток 168
2. Практическое использование комплексных чисел 172
3. Действующее значение сетевого напряжения 193
4. Относительность положения синусоидальных колебаний. . . . 193

Приложение 201

Предметный указатель. 222

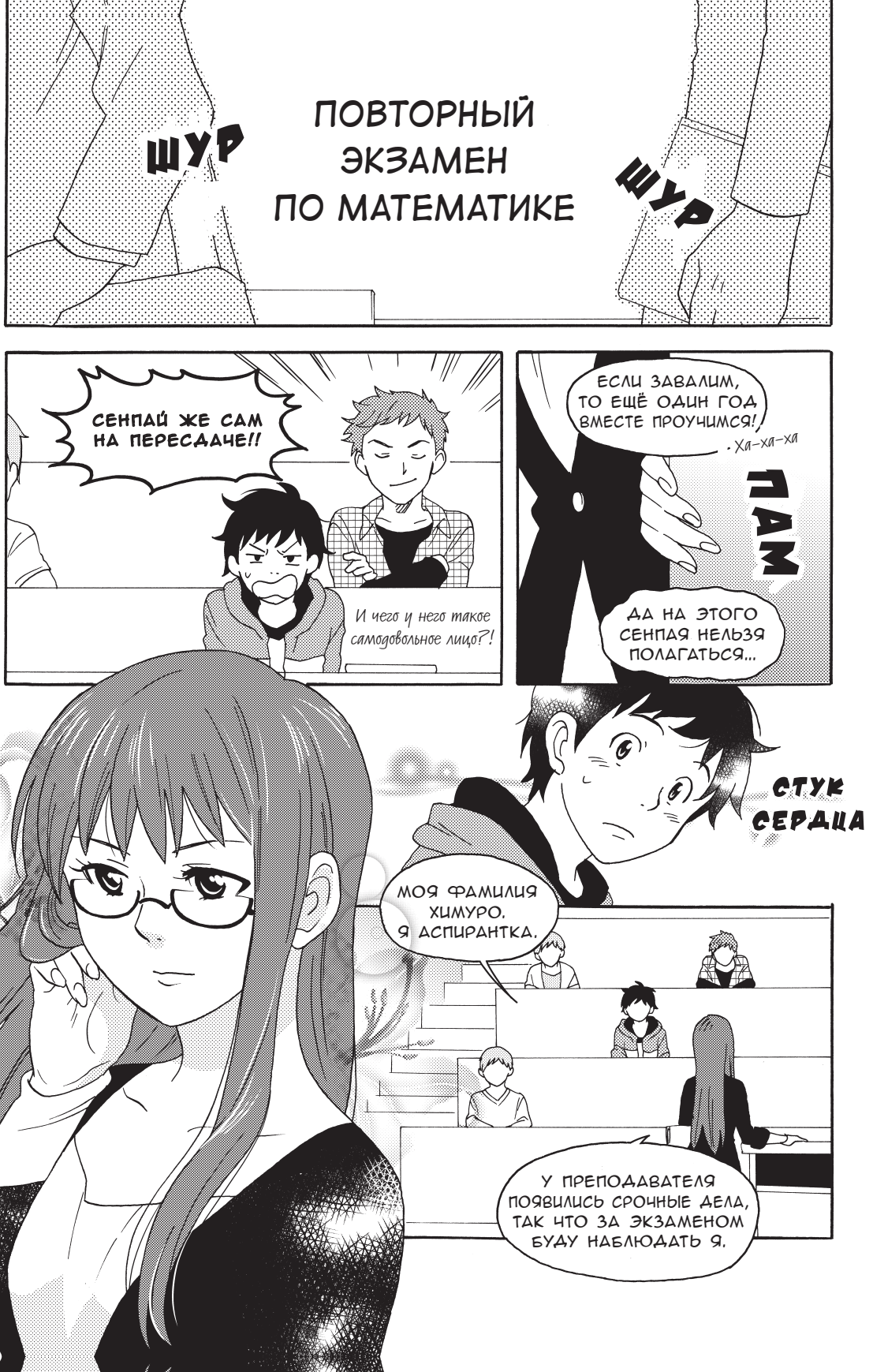
Пролог

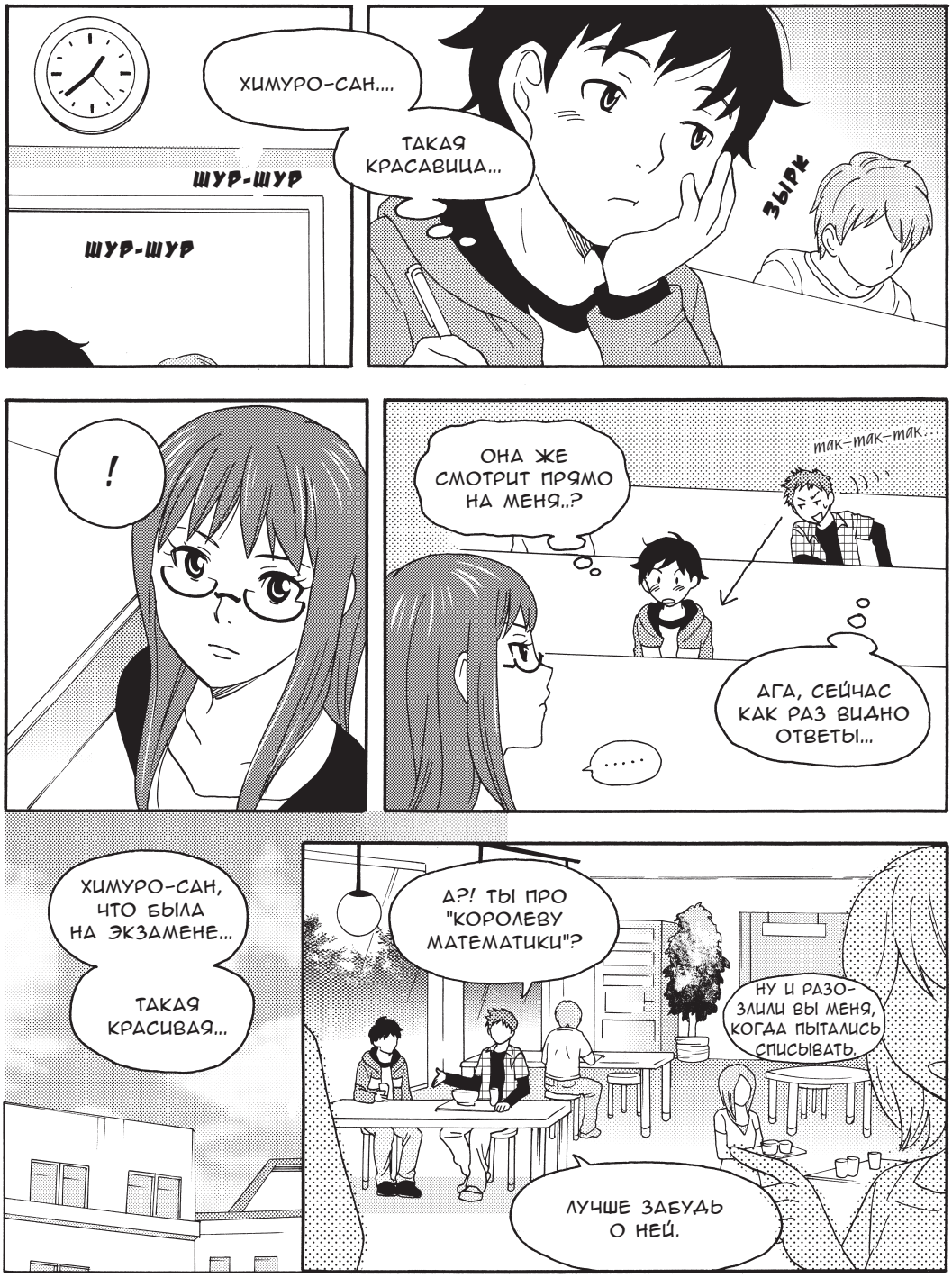
НАЧАЛО ИСТОРИИ

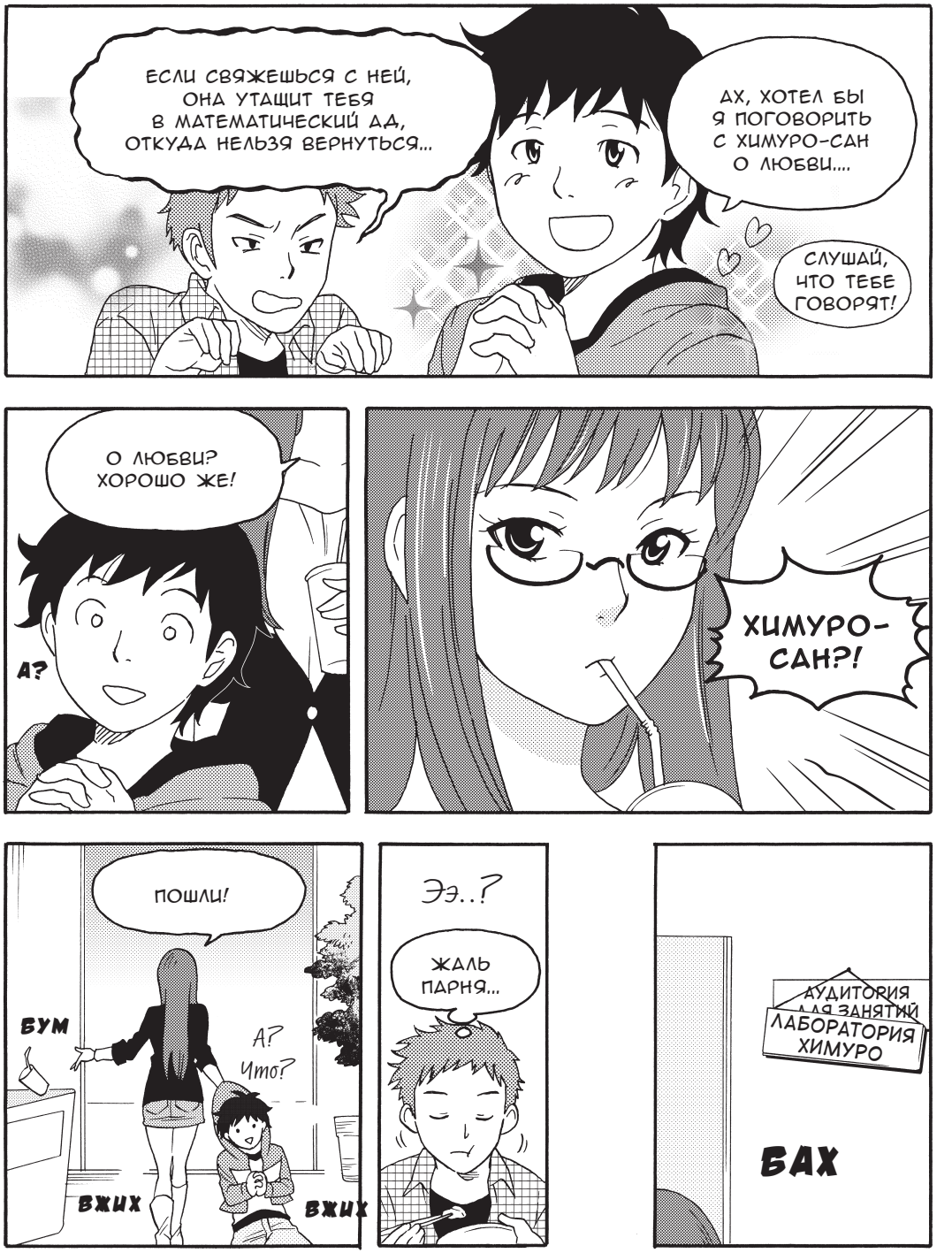

ПРОЩАЙ, КОШМАРНАЯ ПОРА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ!
НАКОНЕЦ-ТО... СТУДЕНЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ, О КОТОРОЙ Я ТАК МЕЧТАЛ! ТЕПЕРЬ-ТО Я ДОБЬЮСЬ УСПЕХА И В ЛЮБВИ, И В УЧЁБЕ!
ПАБАМ!
ОЙ!
ОЙ!
ЭТО Ж НАУЧНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ, ПОЭТОМУ ТУТ ОДНИ ПАРНИ...
ДА ЕЩЁ ВСЁ ГОРАЗДО СЛОЖНЕЕ, ЧЕМ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ВСТУПИТЕЛЬНЫМ!
Я ОБМАНУТ!
БАХ

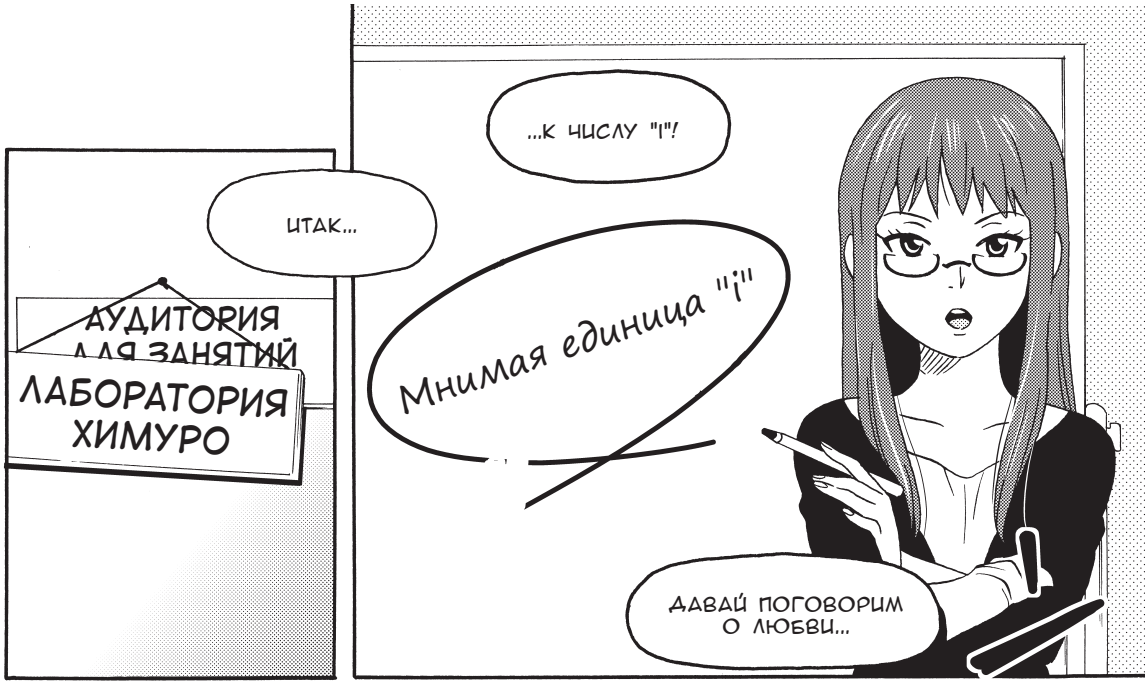


* Сенпай – обращение к более старшему по возрасту, рангу или более опытному коллеге/соученику. В данном случае означает, что Масаси учится на более старшем курсе.


ШУР
ПОВТОРНЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
ШУР
СЕНПАЙ ЖЕ САМ НА ПЕРЕСДАЧЕ!!
И чего у него такое самодовольное лицо?!
ЕСЛИ ЗАВАЛИМ, ТО ЕЩЁ ОДИН ГОД ВМЕСТЕ ПРОУЧИМСЯ!
Ха-ха-ха
ПАМ
ДА НА ЭТОГО СЕНПАЯ НЕЛЬЗЯ ПОЛАГАТЬСЯ...
СТУК СЕРДЦА
МОЯ ФАМИЛИЯ ХИМУРО. Я АСПИРАНТКА.
У ПРЕПОДАВАТЕЛЯ ПОЯВИЛИСЬ СРОЧНЫЕ ДЕЛА, ТАК ЧТО ЗА ЭКЗАМЕНОМ БУДУ НАБЛЮДАТЬ Я.


ХИМУРО-САН....
ТАКАЯ КРАСАВИЦА...
ШУР-ШУР
ШУР-ШУР
ЗЫРК
!
ОНА ЖЕ СМОТРИТ ПРЯМО НА МЕНЯ..?
так-так-так...
АГА, СЕЙЧАС КАК РАЗ ВИДНО ОТВЕТЫ...
.....
ХИМУРО-САН, ЧТО БЫЛА НА ЭКЗАМЕНЕ...
ТАКАЯ КРАСИВАЯ...
А?! ТЫ ПРО "КОРОЛЕВУ МАТЕМАТИКИ"?
НУ И РАЗОЗЛИЛИ ВЫ МЕНЯ, КОГДА ПЫТАЛИСЬ СПИСЫВАТЬ.
ЛУЧШЕ ЗАБУДЬ О НЕЙ.


ЕСЛИ СВЯЖЕШЬСЯ С НЕЙ, ОНА УТАЩИТ ТЕБЯ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АД, ОТКУДА НЕЛЬЗЯ ВЕРНУТЬСЯ...
АХ, ХОТЕЛ БЫ Я ПОГОВОРИТЬ С ХИМУРО-САН О ЛЮБВИ....
СЛУШАЙ, ЧТО ТЕБЕ ГОВОРЯТ!
О ЛЮБВИ? ХОРОШО ЖЕ!
А?
ХИМУРО-САН?!
ПОШЛИ!
БУМ
А? Что?
ВЖИХ
ВЖИХ
Ээ..?
ЖАЛЬ ПАРНЯ...
АУДИТОРИЯ ДЛЯ ЗАНЯТИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ХИМУРО
БАХ


ИТАК...
АУДИТОРИЯ ДЛЯ ЗАНЯТИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ХИМУРО
...К ЧИСЛУ "i"!
Мнимая единица "i"
ДАВАЙ ПОГОВОРИМ О ЛЮБВИ...

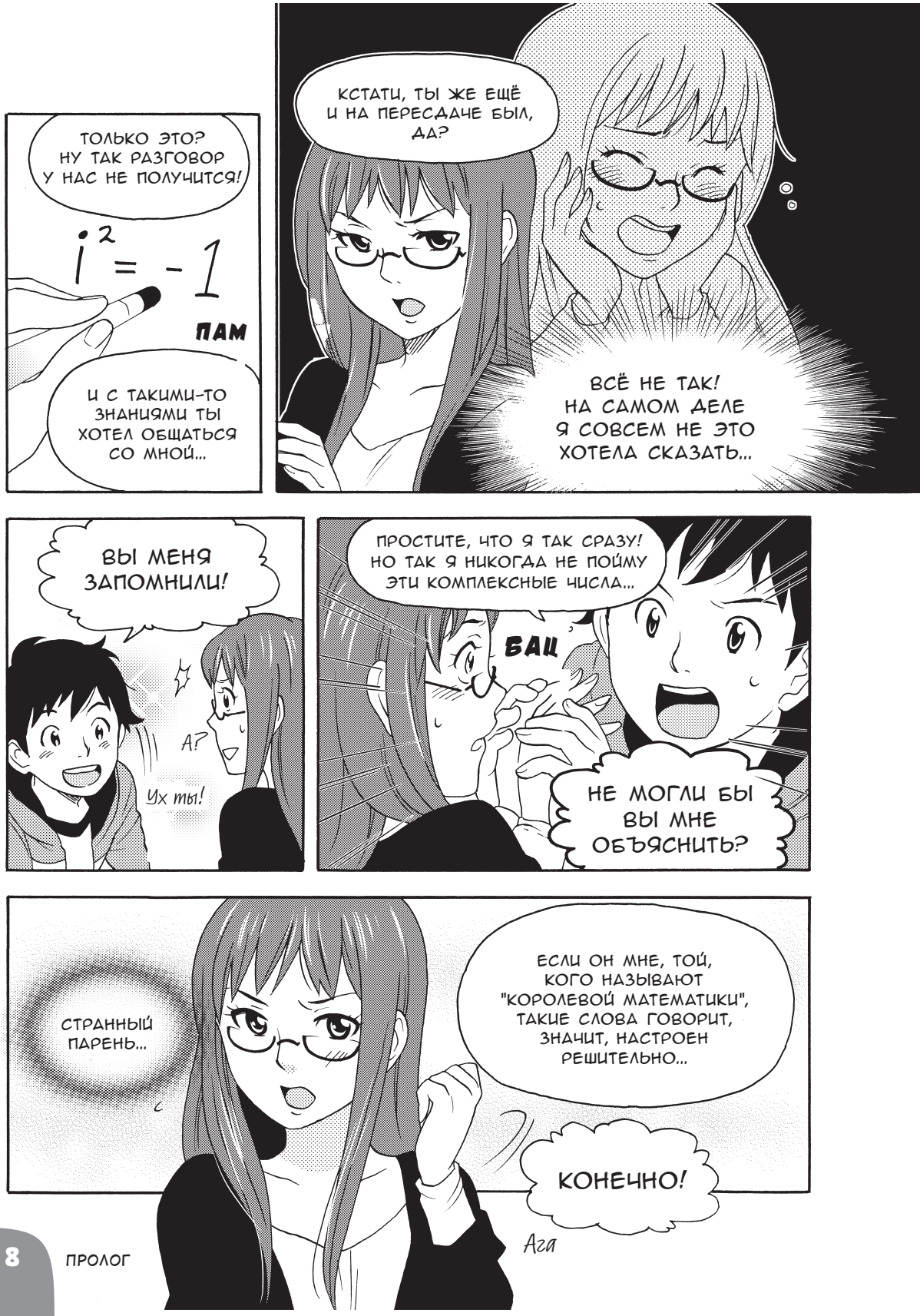

НЕ ОБ ЭТОМ МНЕ ХОТЕЛОСЬ ПОГОВОРИТЬ... УЖ НИКАК НЕ ПРО ПУСТОЕ ЧИСЛО "i"...
Мнимая е
ЕСЛИ ЧИСЛО МНИМОЕ, ЭТО НЕ ЗНАЧИТ, ЧТО ОНО ПУСТОЕ!


РАЗВЕ? НО РАЗ ОНО НАЗЫВАЕТСЯ "МНИМЫМ"...
РАЗВЕ ЭТО НЕ ОЗНАЧАЕТ, ЧТО ЕГО НЕ СУЩЕСТВУЕТ И ОНО ПУСТОЕ?

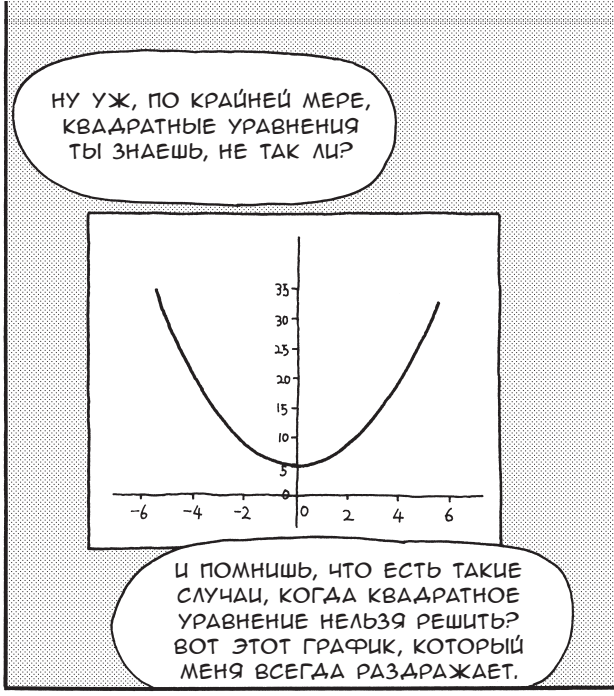

I ПРОИСХОДИТ ОТ IMAGINARY NUMBER, ТО ЕСТЬ "ВООБРАЖАЕМОЕ ЧИСЛО", ДРУГИМИ СЛОВАМИ, ОНО СОЗДАНО СИЛОЙ ВООБРАЖЕНИЯ!
Imaginary number
ПАМ
БЛАГОДАРЯ ТОМУ ЧТО ЛЮДИ СОЗДАЛИ ЭТО ЧИСЛО, МИР ИЗМЕНИЛСЯ!


ВОТ О ЧЁМ Я ХОТЕЛА ПОГОВОРИТЬ...
number
ИТАК, ЧТО ТЫ ЗНАЕШЬ О МНИМОЙ ЕДИНИЦЕ?


Хмм
ЕСЛИ ЕЁ ВОЗВЕСТИ В КВАДРАТ, ТО ПОЛУЧИТСЯ "-1"...
ТОЛЬКО ЭТО...

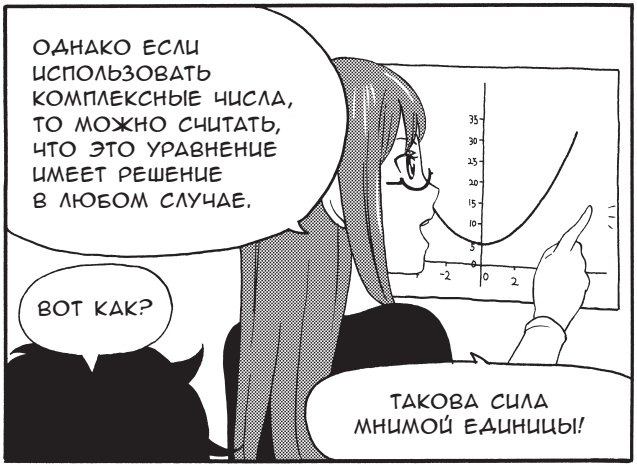

КСТАТИ, ТЫ ЖЕ ЕЩЁ И НА ПЕРЕСДАЧЕ БЫЛ, ДА?
ВСЁ НЕ ТАК! НА САМОМ ДЕЛЕ Я СОВСЕМ НЕ ЭТО ХОТЕЛА СКАЗАТЬ...
ТОЛЬКО ЭТО? НУ ТАК РАЗГОВОР У НАС НЕ ПОЛУЧИТСЯ!
$i^2 = -1$
ПАМ
И С ТАКИМИ-ТО ЗНАНИЯМИ ТЫ ХОТЕЛ ОБЩАТЬСЯ СО МНОЙ...
ПРОСТИТЕ, ЧТО Я ТАК СРАЗУ! НО ТАК Я НИКОГДА НЕ ПОЙМУ ЭТИ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА...
БАЦ
НЕ МОГЛИ БЫ ВЫ МНЕ ОБЪЯСНИТЬ?
ВЫ МЕНЯ ЗАПОМНИЛИ!
А?
Ух ты!
ЕСЛИ ОН МНЕ, ТОЙ, КОГО НАЗЫВАЮТ "КОРОЛЕВОЙ МАТЕМАТИКИ", ТАКИЕ СЛОВА ГОВОРИТ, ЗНАЧИТ, НАСТРОЕН РЕШИТЕЛЬНО...
СТРАННЫЙ ПАРЕНЬ...
КОНЕЧНО!
Ага


ВОТ ВЫ СКАЗАЛИ, ЧТО ЭТО ЧИСЛО СОЗДАНО ЧЕЛОВЕЧЕСКИМ ВООБРАЖЕНИЕМ, А ДЛЯ ЧЕГО ЕГО СОЗДАЛИ?
$i^2=-1$
АГА... С ЧЕГО БЫ НАМ ЛУЧШЕ НАЧАТЬ?


НУ УЖ, ПО КРАЙНЕЙ МЕРЕ, КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЫ ЗНАЕШЬ, НЕ ТАК ЛИ?
35
30
25
20
15
10
5
0
-6
-4
-2
0
2
4
6
И ПОМНИШЬ, ЧТО ЕСТЬ ТАКИЕ СЛУЧАИ, КОГДА КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕЛЬЗЯ РЕШИТЬ? ВОТ ЭТОТ ГРАФИК, КОТОРЫЙ МЕНЯ ВСЕГДА РАЗДРАЖАЕТ.


ХММ
РЕШЕНИЙ НЕТ, ЕСЛИ ГРАФИК НЕ ПЕРЕСЕКАЕТ ОСЬ X, ТАК?
НО Я НЕ ПОЙМУ, ЧТО В ЭТОМ МОЖЕТ ТАК РАЗДРАЖАТЬ?


КОГДА Я УЧИЛАСЬ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ, Я, БЫВАЛО, ВСЮ НОЧЬ НЕ СПАЛА, ВСЁ СМОТРЕЛА НА ЭТОТ ГРАФИК, И ТАК ОН МЕНЯ БЕСИЛ!
Как это так, нет решения?!.
МОЖЕТ, ВАМ ПРОСТО КАЛЬЦИЯ НЕ ХВАТАЛО?
Ха-ха-ха


ОДНАКО ЕСЛИ ИСПОЛЬЗОВАТЬ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ТО МОЖНО СЧИТАТЬ, ЧТО ЭТО УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ РЕШЕНИЕ В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ.
ВОТ КАК?
ТАКОВА СИЛА МНИМОЙ ЕДИНИЦЫ!


ХММ... ЭЭЭ....
Ничего себе...
ЕСЛИ ЧТО-ТО НЕ ПОНЯТНО, ТО ТАК И СКАЖИ.

РАССМОТРИМ ЕЩЁ ОДИН ПРИМЕР. ТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗНАЕШЬ?

НИ...

А... ДА, ЭТО ОЧЕНЬ ХОРОШИЙ ПРИМЕР.

ПЕРЕСТАНЬ ПРИТВОРЯТЬСЯ, ЧТО ТЫ ЗНАЕШЬ!

$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}=\sqrt{2}V_m\sin(\omega t)$$

Дифференциальное уравнение для силы тока.

СКРИП

НИЧЕГО НЕ ПОНИМАЮ...

Ох, и устал, маленький...

ПРОСНИСЬ!

ЭТО УРАВНЕНИЕ НЕ ПОНЯТЬ, ЕСЛИ НЕ ЗНАЕШЬ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. ПОЭТОМУ СЕЙЧАС СМОТРИ ТОЛЬКО НА ЕГО ФОРМУ.

ПЕРЕПИШЕМ ЭТО УРАВНЕНИЕ, ИСПОЛЬЗУЯ КОМПЛЕКНЫЕ ЧИСЛА.

$$RI+j\omega LI=V$$

Алгебраическое уравнение для силы тока

I и V - здесь комплексные числа, а j - мнимая единица.

ЭЭ...

НЕ ОБРАЩАЙ ВНИМАНИЯ НА СМЫСЛ ЭТИХ СИМВОЛОВ, СМОТРИ ТОЛЬКО НА ФОРМУ УРАВНЕНИЯ.

АГА! ТЕПЕРЬ ОСТАЛИСЬ ТОЛЬКО ПРОИЗВЕДЕНИЕ И СУММА!

А!

ИМЕННО.

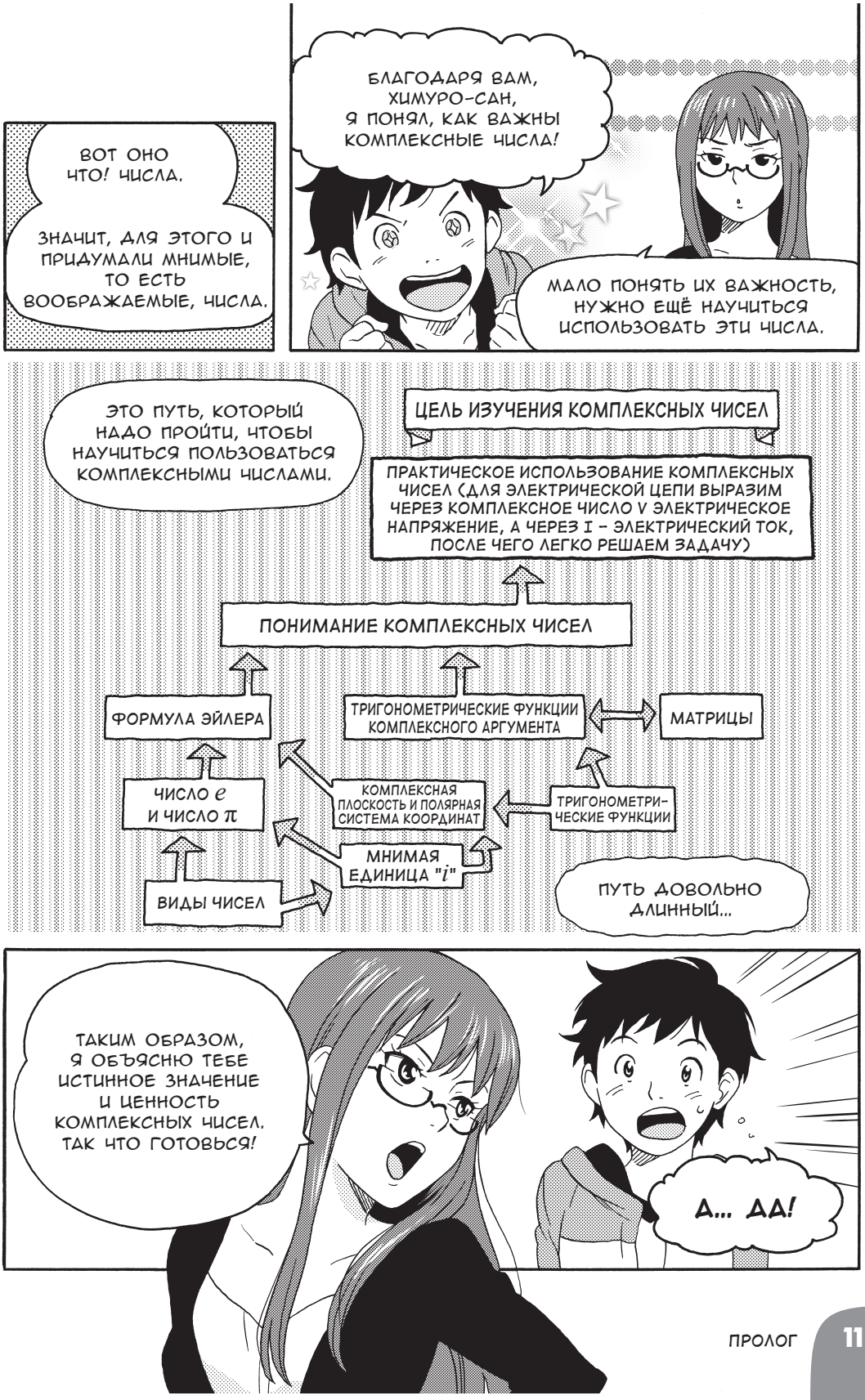
ТАК ДАЖЕ СЛОЖНЫЕ УРАВНЕНИЯ МОЖНО РЕШАТЬ ДОВОЛЬНО ПРОСТО, ЕСЛИ ИСПОЛЬЗОВАТЬ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

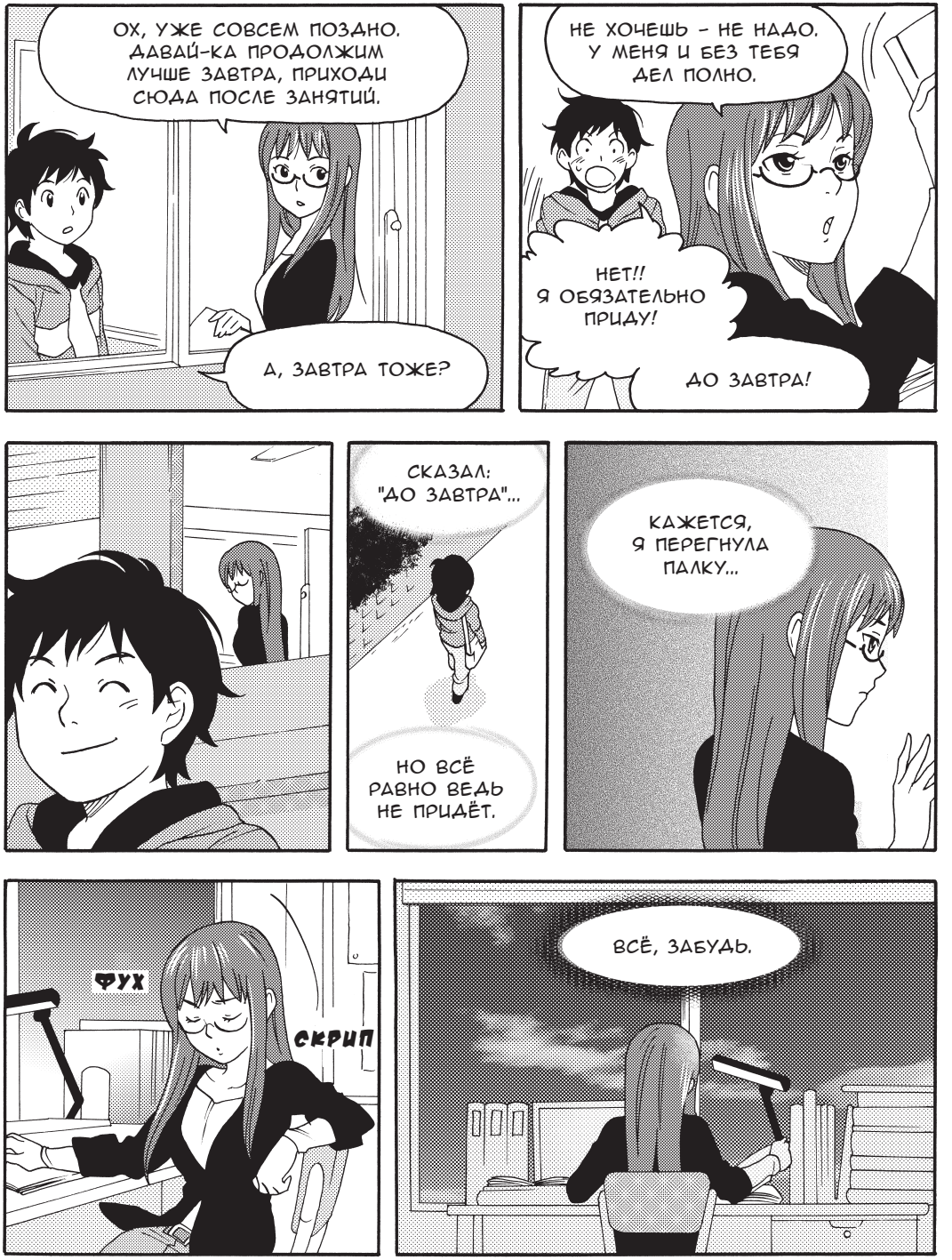
Превратись в простое уравнение!

$RI+j\omega LI=V$

ТАДАМ!

ОСОБЕННО ЭТО КАСАЕТСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ТОК, ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕНИЕ, ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ, ЗВУКОВЫЕ И ДРУГИЕ ВОЛНЫ.


Благодаря вам, Химуро-сан, я понял, как важны комплексные числа!
Мало понять их важность, нужно ещё научиться использовать эти числа.
Вот оно что! Числа. Значит, для этого и придумали мнимые, то есть воображаемые, числа.
Это путь, который надо пройти, чтобы научиться пользоваться комплексными числами.
Цель изучения комплексных чисел
Практическое использование комплексных чисел (для электрической цепи выразим через комплексное число V электрическое напряжение, а через I – электрический ток, после чего легко решаем задачу)
Понимание комплексных чисел
Формула Эйлера
Тригонометрические функции комплексного аргумента
Матрицы
Число e и число π
Комплексная плоскость и полярная система координат
Тригонометрические функции
Мнимая единица "i"
Виды чисел
Путь довольно длинный...
Таким образом, я объясню тебе истинное значение и ценность комплексных чисел. Так что готовься!
А... да!


ОХ, УЖЕ СОВСЕМ ПОЗДНО. ДАВАЙ-КА ПРОДОЛЖИМ ЛУЧШЕ ЗАВТРА, ПРИХОДИ СЮДА ПОСЛЕ ЗАНЯТИЙ.
А, ЗАВТРА ТОЖЕ?
НЕ ХОЧЕШЬ – НЕ НАДО. У МЕНЯ И БЕЗ ТЕБЯ ДЕЛ ПОЛНО.
НЕТ!! Я ОБЯЗАТЕЛЬНО ПРИДУ!
ДО ЗАВТРА!
СКАЗАЛ: "ДО ЗАВТРА"...
НО ВСЁ РАВНО ВЕДЬ НЕ ПРИДЁТ.
КАЖЕТСЯ, Я ПЕРЕГНУЛА ПАЛКУ...
ФУХ
СКРИП
ВСЁ, ЗАБУДЬ.

Глава

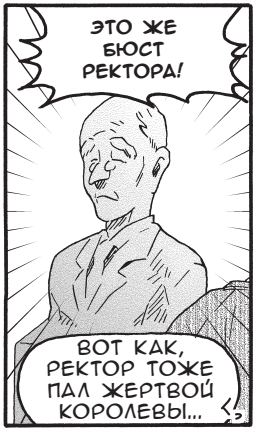
1

ВИДЫ ЧИСЕЛ


ЮТА, ТЫ КАК, ЖИВ? "КОРОЛЕВА МАТЕМАТИКИ" ЖЁСТКО С ТОБОЙ ОБОШЛАСЬ?
НУ, ГОВОРИЛИ МЫ НЕ О ТОМ, О ЧЁМ БЫ МНЕ ХОТЕЛОСЬ... ОНА МНЕ ВСЁ ПРО КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА РАССКАЗЫВАЛА. НО ЭТО БЫЛО ПОЛЕЗНО!
ОНА, КОНЕЧНО, С ХАРАКТЕРОМ!


ХОДИТ ТАКАЯ ЛЕГЕНДА, ЧТО ТОТ, КТО ВСТУПИТ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СПОР С КОРОЛЕВОЙ, ОТ УЖАСА ПРЕВРАТИТСЯ В КАМЕНЬ.
ХИМУРО-САН – ЧТО, ВЕДЬМА?


ЭТО ПРАВДА. ВОТ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО!


ЭТО ЖЕ БЮСТ РЕКТОРА!
ВОТ КАК, РЕКТОР ТОЖЕ ПАЛ ЖЕРТВОЙ КОРОЛЕВЫ...


НО НЕТ ЖЕ, ОН ЖЕ ЕЩЁ ЖИВ!
Еле-еле


Вот же...
ЭХ, А МНЕ НУЖНО ЩАТИ ПРОДОЛЖАТЬ ВЧЕРАШНИЙ УРОК...
СМОТРИ ОСТОРОЖНЕЙ, ЧТОБЫ НЕ ПРЕВРАТИТЬСЯ В КАМЕНЬ!


АУДИТОРИЯ
ЛАБОРАТОРИЯ ХИМУРО
БАЦ
ДОБРЫЙ ДЕНЬ!
НЯМ
НЯМ
ВАНИЛЬНОЕ
МОРОЖЕНОЕ
ВЫ ЛЮБИТЕ МОРОЖЕНОЕ?
!!
ЧТО ТЫ ТУТ ДЕЛАЕШЬ?!
БАЦ
БУМ
НО ВЫ ЖЕ САМИ МНЕ СКАЗАЛИ ПРИЙТИ!
ИЗВИНИТЕ... ЕСЛИ ПОМЕШАЛ, Я УЙДУ...
НО Я ХОТЕЛ БЫ КОЕ-ЧТО СПРОСИТЬ...
НУ... РАЗ УЖ СПЕЦИАЛЬНО ПРИШЁЛ, НЕУДОБНО ТЕБЯ ВЫГОНЯТЬ...
ДАВАЙ ПРОДОЛЖИМ ТО, ЧТО МЫ ВЧЕРА НАЧАЛИ.
ТЫ ЖЕ НА САМОМ ДЕЛЕ РАДА, ПОЧЕМУ ОПЯТЬ В ТАКОМ ТОНЕ ГОВОРИШЬ...


А ЧТО ТЫ ХОТЕЛ СПРОСИТЬ?
Мнимая единица
i
ЭТО, ПРАВДА, ТАКОЙ БАЗОВЫЙ ВОПРОС...
Я ХОТЕЛ ВЧЕРА РАЗОБРАТЬСЯ, НО, ЧЕСТНО ГОВОРЯ, ТАК И НЕ ПОНЯЛ...


ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ – ЭТО ВЕДЬ УМНОЖЕНИЕ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ЧИСЕЛ, ТАК?
$i^2 = -1$
ДА.


А ЧИСЛА БЫВАЮТ С "ПЛЮСОМ" И С "МИНУСОМ", ТАК?
СКРИП-СКРИП
ДА, ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ.


СКРИП-СКРИП


НУ ВОТ, Я СКОЛЬКО НИ ДУМАЛ, НЕ ПОЙМУ, КАК ЖЕ МОЖЕТ ПОЛУЧИТЬСЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО ПОСЛЕ ВОЗВЕДЕНИЯ В КВАДРАТ...
плюс х плюс = плюс
минус х минус = плюс
?

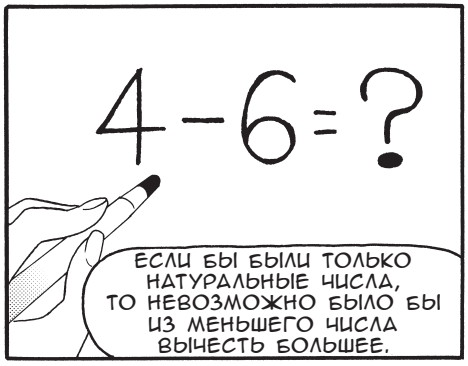

ЭТО ПОТОМУ, ЧТО ТЫ ДУМАЕШЬ В ГРАНИЦАХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ.


Вещественные числа
?
?
....
НУ ЧТО Ж, НАЧНУ ОБЪЯСНЕНИЕ С ОСНОВЫ ОСНОВ...

1. ВИДЫ ЧИСЕЛ


СНАЧАЛА ЛЮДИ ОТКРЫЛИ НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.
МОРО-ЖЕНОЕ
МОРО-ЖЕНОЕ
МОРО-ЖЕНОЕ
НАТУРАЛЬНЫЕ И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА
ЭТО ЧИСЛА, КОТОРЫЕ ИСПОЛЬЗУЮТ ДЛЯ СЧЁТА ПРЕДМЕТОВ.

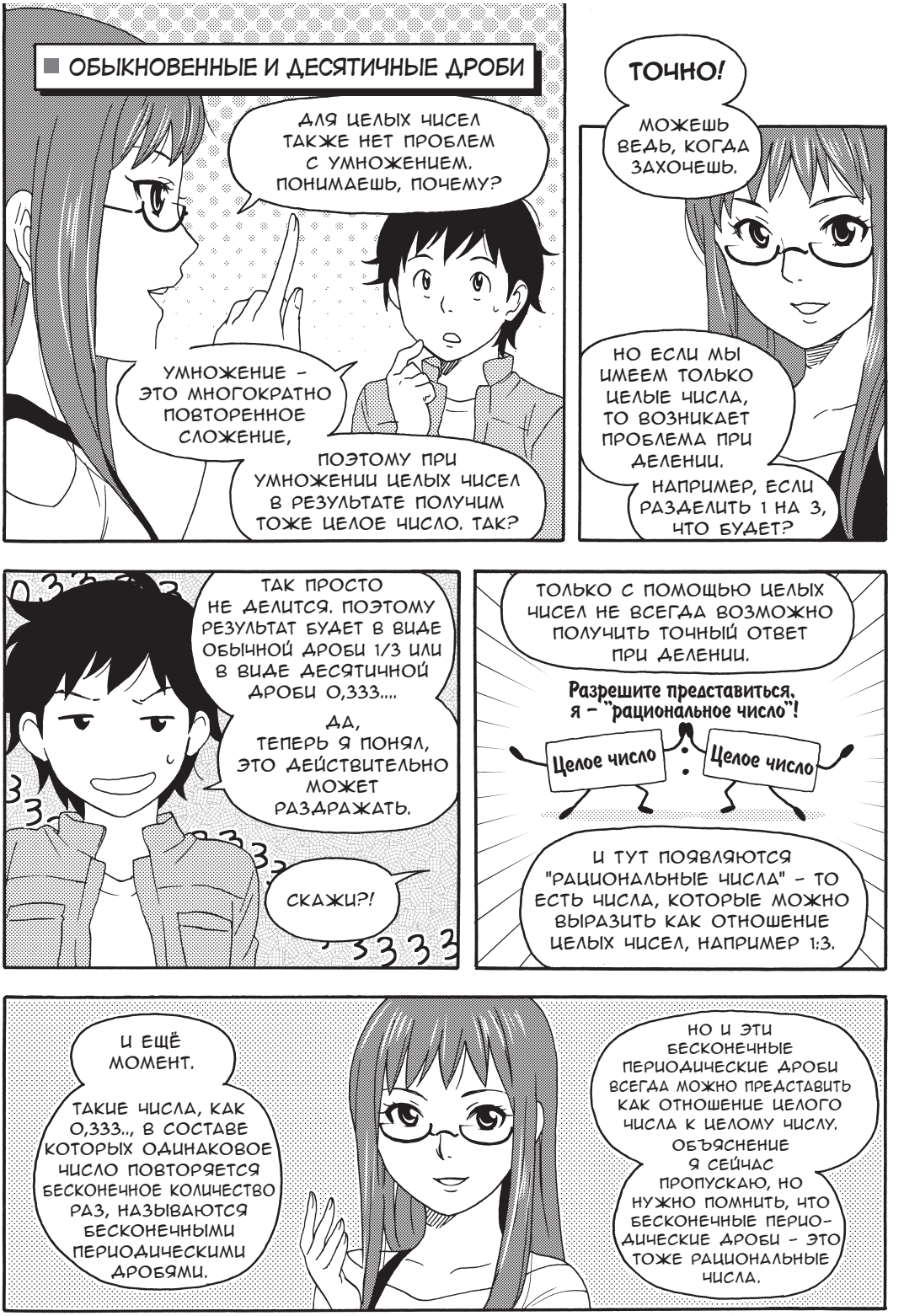

ДРУГИМИ СЛОВАМИ, ЭТО 1, 2, 3... ДА? ВОТ БЫ БЫЛИ ТОЛЬКО НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, ТОГДА НЕ БЫЛО БЫ НИКАКИХ ПРОБЛЕМ...
МО
РО
ЖЕ
А ВОТ И НЕТ.

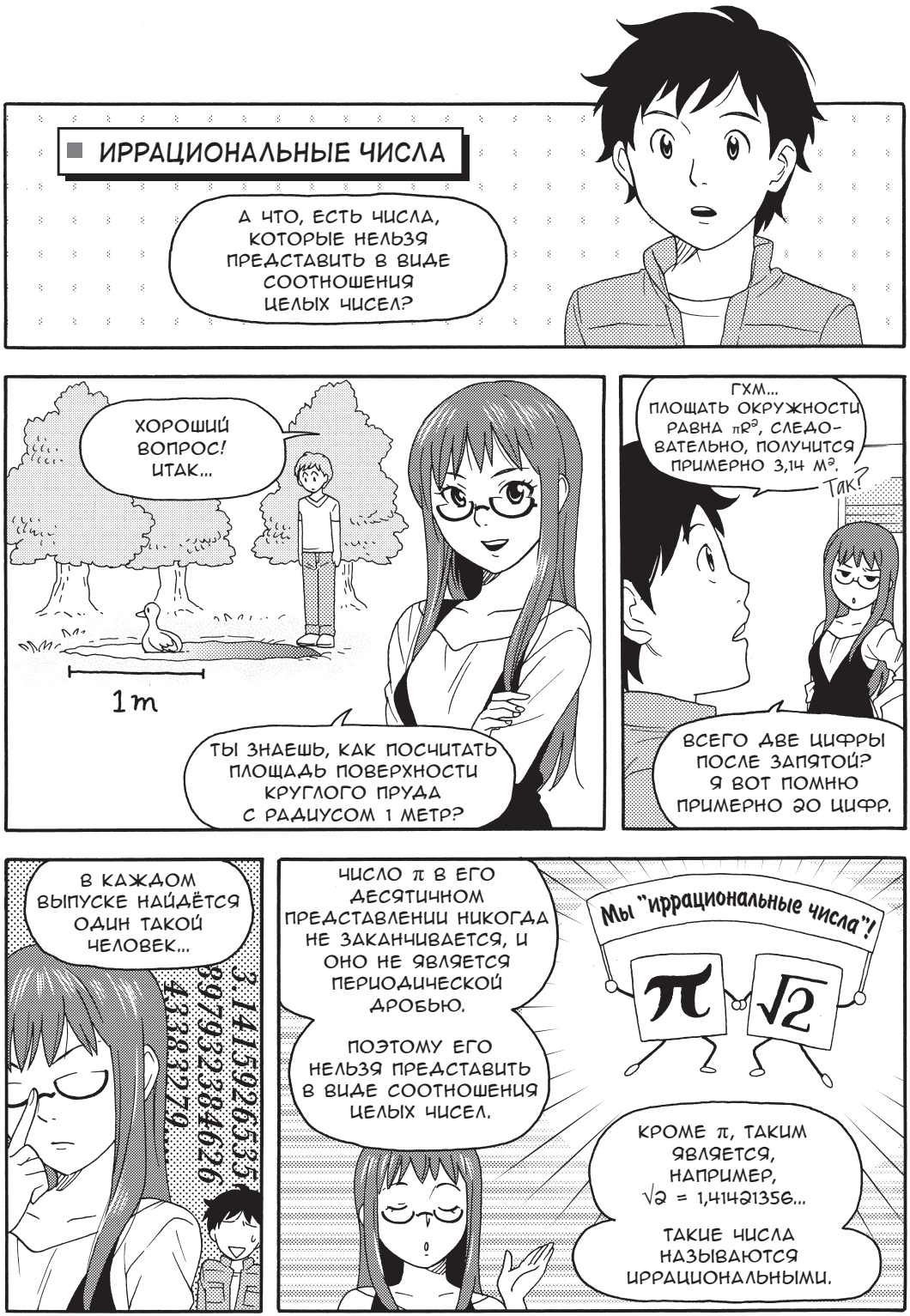

4 − 6 = ?
ЕСЛИ БЫ БЫЛИ ТОЛЬКО НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, ТО НЕВОЗМОЖНО БЫЛО БЫ ИЗ МЕНЬШЕГО ЧИСЛА ВЫЧЕСТЬ БОЛЬШЕЕ.

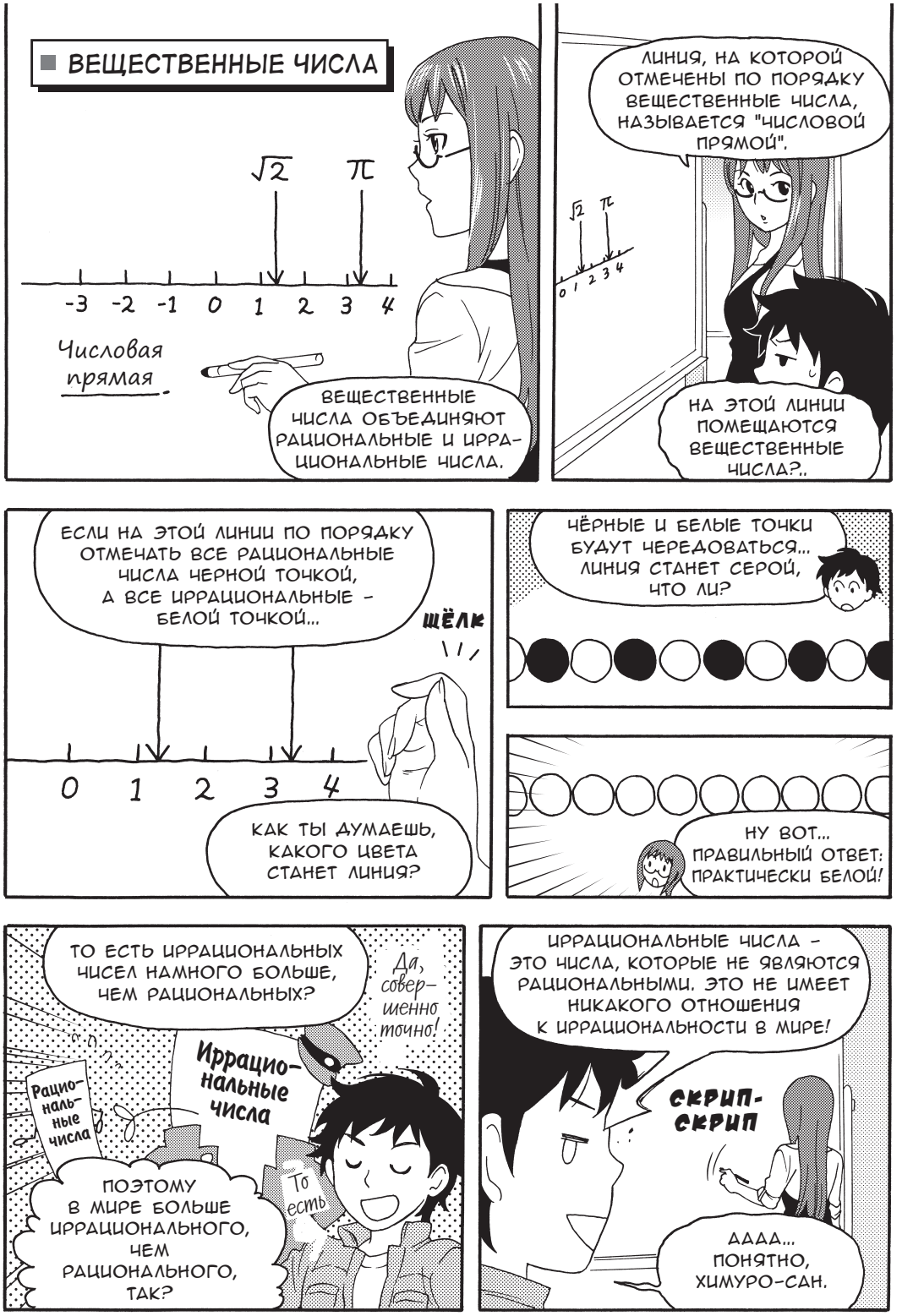

ЕСЛИ МОЖНО СЛОЖИТЬ 4 + 6, НО ПОЧЕМУ-ТО НЕЛЬЗЯ ВЫЧЕСТЬ 4 − 6, ЭТО УЖАСНО БЕСИТ!
Мир, в котором нет отрицательных чисел! Бесит!!
И ЧТОБЫ ЭТО ТАК НЕ РАЗДРАЖАЛО, ПРИДУМАЛИ ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА, ДА?

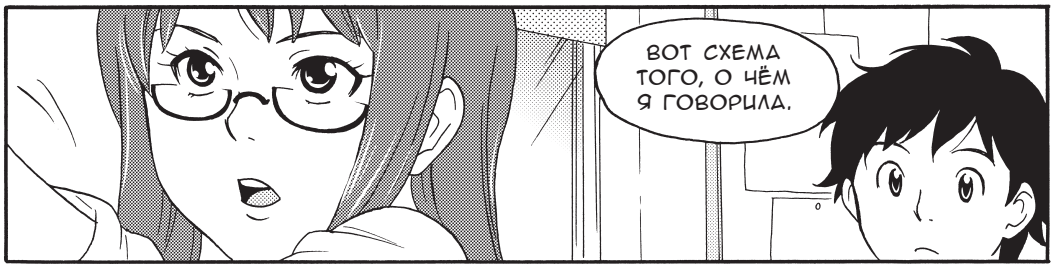

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, НОЛЬ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА ВМЕСТЕ НАЗЫВАЮТСЯ "ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА" (INTEGER). В СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ НОЛЬ ИНОГДА ОТНОСЯТ К НАТУРАЛЬНЫМ ЧИСЛАМ.
Группа "Целые числа"
Мы выступаем как "Целые числа"!
ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА
0
НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА
Объединившись с натуральными числами...
ВОТ ОНО ЧТО.

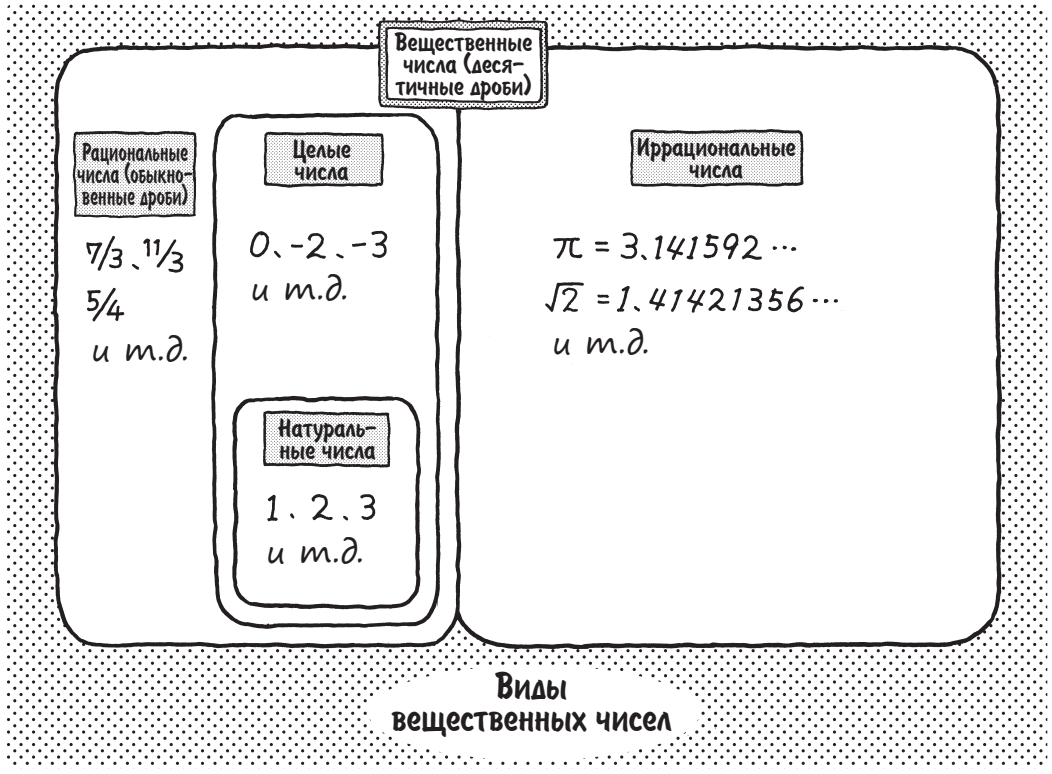

МОЖНО СЧИТАТЬ, ЧТО ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА "РАСШИРЯЮТ" ПОНЯТИЕ О НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ. ЧИСЛА СОЗДАЛИ ЛЮДИ, ПОЭТОМУ И ДЕЛАТЬ С НИМИ ОНИ МОГУТ ЧТО УГОДНО.
В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ, БЛАГОДАРЯ ЦЕЛЫМ ЧИСЛАМ МОЖНО БЕЗ ПРОБЛЕМ ПРОИЗВОДИТЬ СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ.


■ ОБЫКНОВЕННЫЕ И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ
ДЛЯ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ТАКЖЕ НЕТ ПРОБЛЕМ С УМНОЖЕНИЕМ. ПОНИМАЕШЬ, ПОЧЕМУ?
УМНОЖЕНИЕ – ЭТО МНОГОКРАТНО ПОВТОРЕННОЕ СЛОЖЕНИЕ,
ПОЭТОМУ ПРИ УМНОЖЕНИИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ В РЕЗУЛЬТАТЕ ПОЛУЧИМ ТОЖЕ ЦЕЛОЕ ЧИСЛО. ТАК?
ТОЧНО!
МОЖЕШЬ ВЕДЬ, КОГДА ЗАХОЧЕШЬ.
НО ЕСЛИ МЫ ИМЕЕМ ТОЛЬКО ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА, ТО ВОЗНИКАЕТ ПРОБЛЕМА ПРИ ДЕЛЕНИИ.
НАПРИМЕР, ЕСЛИ РАЗДЕЛИТЬ 1 НА 3, ЧТО БУДЕТ?
ТАК ПРОСТО НЕ ДЕЛИТСЯ. ПОЭТОМУ РЕЗУЛЬТАТ БУДЕТ В ВИДЕ ОБЫЧНОЙ ДРОБИ 1/3 ИЛИ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ 0,333....
ДА, ТЕПЕРЬ Я ПОНЯЛ, ЭТО ДЕЙСТВИТЕЛЬНО МОЖЕТ РАЗДРАЖАТЬ.
СКАЖИ?!
ТОЛЬКО С ПОМОЩЬЮ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ НЕ ВСЕГДА ВОЗМОЖНО ПОЛУЧИТЬ ТОЧНЫЙ ОТВЕТ ПРИ ДЕЛЕНИИ.
Разрешите представиться, я – "рациональное число"!
Целое число
Целое число
И ТУТ ПОЯВЛЯЮТСЯ "РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА" – ТО ЕСТЬ ЧИСЛА, КОТОРЫЕ МОЖНО ВЫРАЗИТЬ КАК ОТНОШЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ, НАПРИМЕР 1:3.
И ЕЩЁ МОМЕНТ.
ТАКИЕ ЧИСЛА, КАК 0,333.., В СОСТАВЕ КОТОРЫХ ОДИНАКОВОЕ ЧИСЛО ПОВТОРЯЕТСЯ БЕСКОНЕЧНОЕ КОЛИЧЕСТВО РАЗ, НАЗЫВАЮТСЯ БЕСКОНЕЧНЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ДРОБЯМИ.
НО И ЭТИ БЕСКОНЕЧНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДРОБИ ВСЕГДА МОЖНО ПРЕДСТАВИТЬ КАК ОТНОШЕНИЕ ЦЕЛОГО ЧИСЛА К ЦЕЛОМУ ЧИСЛУ. ОБЪЯСНЕНИЕ Я СЕЙЧАС ПРОПУСКАЮ, НО НУЖНО ПОМНИТЬ, ЧТО БЕСКОНЕЧНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДРОБИ – ЭТО ТОЖЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.


ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА
А ЧТО, ЕСТЬ ЧИСЛА, КОТОРЫЕ НЕЛЬЗЯ ПРЕДСТАВИТЬ В ВИДЕ СООТНОШЕНИЯ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ?
ХОРОШИЙ ВОПРОС! ИТАК...
1m
ТЫ ЗНАЕШЬ, КАК ПОСЧИТАТЬ ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ КРУГЛОГО ПРУДА С РАДИУСОМ 1 МЕТР?
ГХМ... ПЛОЩАДЬ ОКРУЖНОСТИ РАВНА πR², СЛЕДОВАТЕЛЬНО, ПОЛУЧИТСЯ ПРИМЕРНО 3,14 М².
ТАК?
ВСЕГО ДВЕ ЦИФРЫ ПОСЛЕ ЗАПЯТОЙ? Я ВОТ ПОМНЮ ПРИМЕРНО 20 ЦИФР.
В КАЖДОМ ВЫПУСКЕ НАЙДЁТСЯ ОДИН ТАКОЙ ЧЕЛОВЕК...
3.14159265358979323846264338327...
ЧИСЛО π В ЕГО ДЕСЯТИЧНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ НИКОГДА НЕ ЗАКАНЧИВАЕТСЯ, И ОНО НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДРОБЬЮ.
ПОЭТОМУ ЕГО НЕЛЬЗЯ ПРЕДСТАВИТЬ В ВИДЕ СООТНОШЕНИЯ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ.
Мы "иррациональные числа"!
π
√2
КРОМЕ π, ТАКИМ ЯВЛЯЕТСЯ, НАПРИМЕР, √2 = 1,41421356...
ТАКИЕ ЧИСЛА НАЗЫВАЮТСЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ.


ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА
√2
π
-3 -2 -1 0 1 2 3 4
Числовая прямая
ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА ОБЪЕДИНЯЮТ РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.
ЛИНИЯ, НА КОТОРОЙ ОТМЕЧЕНЫ ПО ПОРЯДКУ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА, НАЗЫВАЕТСЯ "ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ".
НА ЭТОЙ ЛИНИИ ПОМЕЩАЮТСЯ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА?..
ЕСЛИ НА ЭТОЙ ЛИНИИ ПО ПОРЯДКУ ОТМЕЧАТЬ ВСЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА ЧЕРНОЙ ТОЧКОЙ, А ВСЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ – БЕЛОЙ ТОЧКОЙ...
ЩЁЛК
0 1 2 3 4
КАК ТЫ ДУМАЕШЬ, КАКОГО ЦВЕТА СТАНЕТ ЛИНИЯ?
ЧЁРНЫЕ И БЕЛЫЕ ТОЧКИ БУДУТ ЧЕРЕДОВАТЬСЯ... ЛИНИЯ СТАНЕТ СЕРОЙ, ЧТО ЛИ?
НУ ВОТ... ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ: ПРАКТИЧЕСКИ БЕЛОЙ!
ТО ЕСТЬ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ НАМНОГО БОЛЬШЕ, ЧЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ?
Да, совершенно точно!
Рациональные числа
Иррациональные числа
То есть
ПОЭТОМУ В МИРЕ БОЛЬШЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО, ЧЕМ РАЦИОНАЛЬНОГО, ТАК?
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА – ЭТО ЧИСЛА, КОТОРЫЕ НЕ ЯВЛЯЮТСЯ РАЦИОНАЛЬНЫМИ. ЭТО НЕ ИМЕЕТ НИКАКОГО ОТНОШЕНИЯ К ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ В МИРЕ!
СКРИП-СКРИП
АААА... ПОНЯТНО, ХИМУРО-САН.

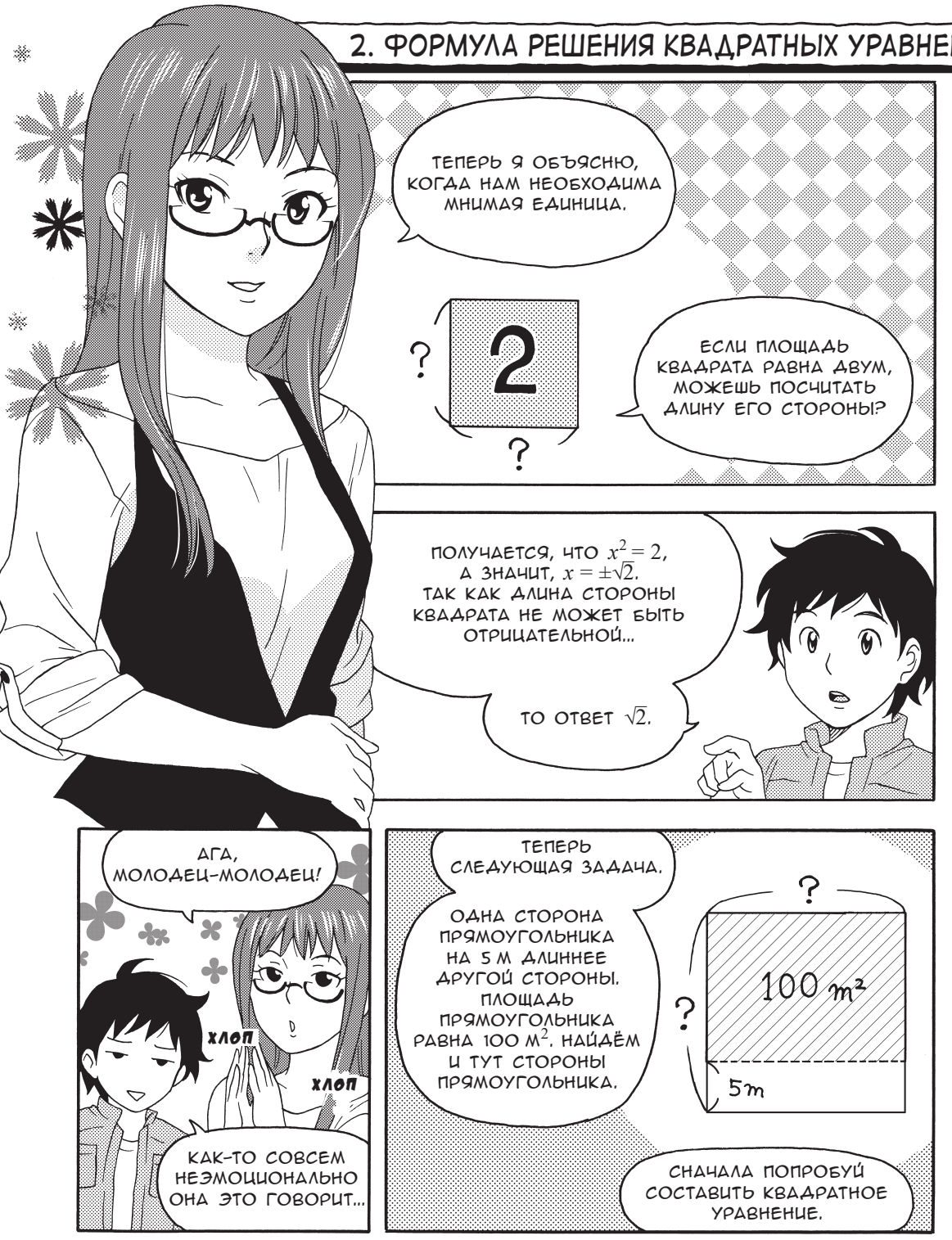


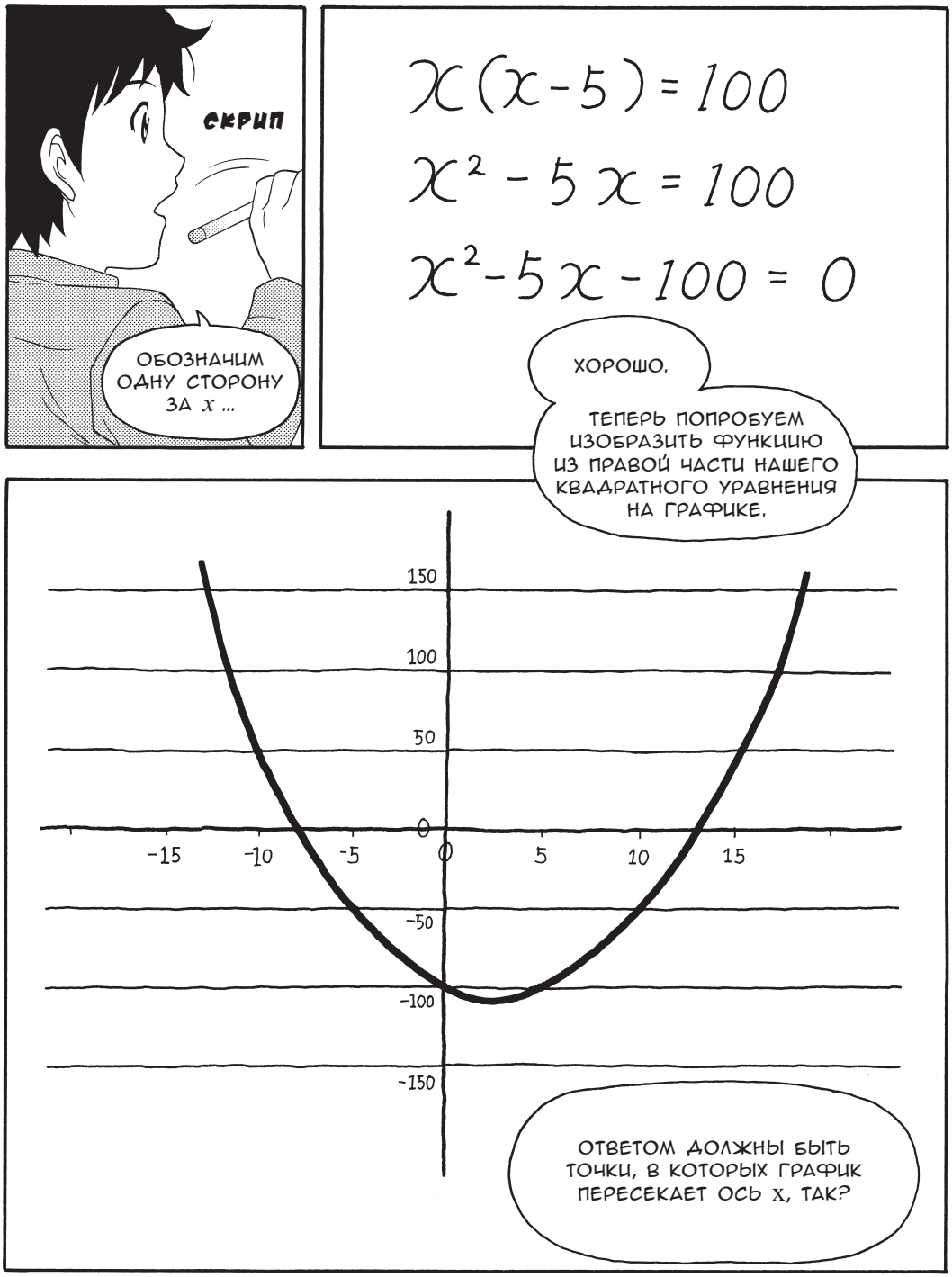


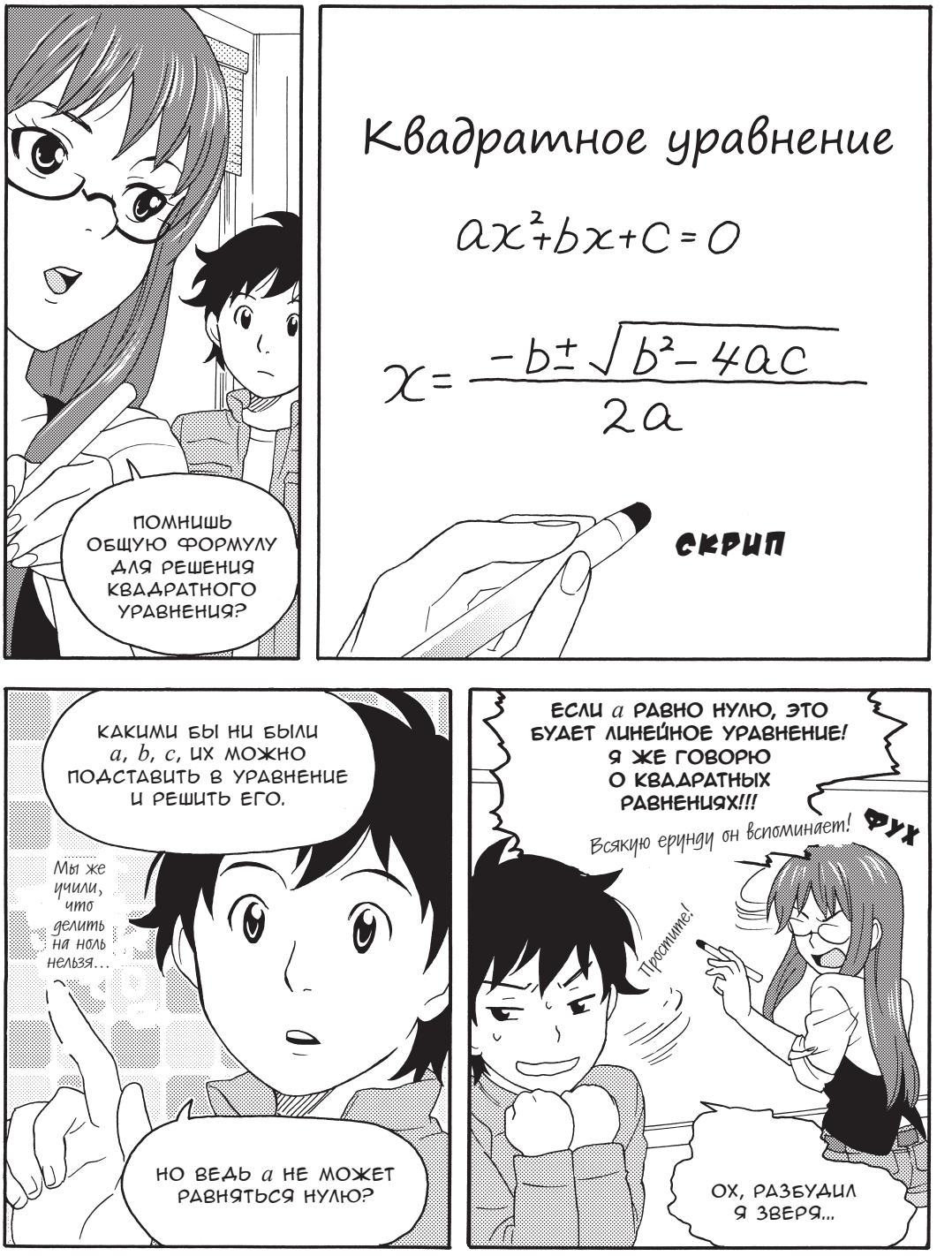
Виды вещественных чисел

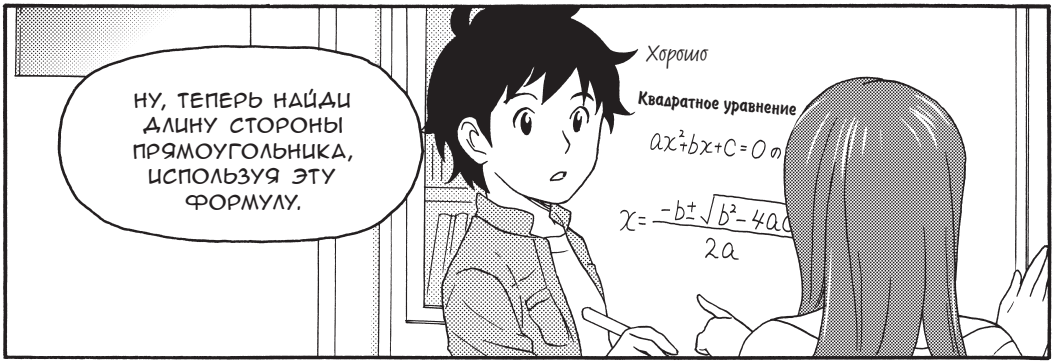


2. ФОРМУЛА РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ




СКРИП
ОБОЗНАЧИМ ОДНУ СТОРОНУ ЗА x ...
x(x-5)=100
x²-5x=100
x²-5x-100=0
ХОРОШО.
ТЕПЕРЬ ПОПРОБУЕМ ИЗОБРАЗИТЬ ФУНКЦИЮ ИЗ ПРАВОЙ ЧАСТИ НАШЕГО КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФИКЕ.
150
100
50
0
-50
-100
-150
-15
-10
-5
0
5
10
15
ОТВЕТОМ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ТОЧКИ, В КОТОРЫХ ГРАФИК ПЕРЕСЕКАЕТ ОСЬ X, ТАК?


ПОМНИШЬ ОБЩУЮ ФОРМУЛУ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ?
Квадратное уравнение
$ax^2+bx+c=0$
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
СКРИП
КАКИМИ БЫ НИ БЫЛИ a, b, c, ИХ МОЖНО ПОДСТАВИТЬ В УРАВНЕНИЕ И РЕШИТЬ ЕГО.
Мы же учили, что делить на ноль нельзя...
НО ВЕДЬ a НЕ МОЖЕТ РАВНЯТЬСЯ НУЛЮ?
ЕСЛИ a РАВНО НУЛЮ, ЭТО БУДЕТ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ! Я ЖЕ ГОВОРЮ О КВАДРАТНЫХ РАВНЕНИЯХ!!!
Всякую ерунду он вспоминает!
ФУХ
Простите!
ОХ, РАЗБУДИЛ Я ЗВЕРЯ...



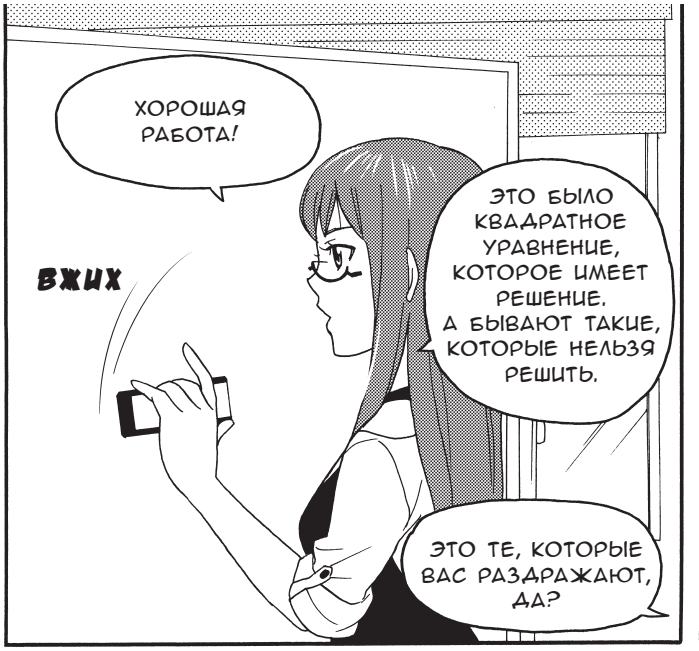
$a=1$ 、$b=-5$　$c=-100$

Подставим эти значения:

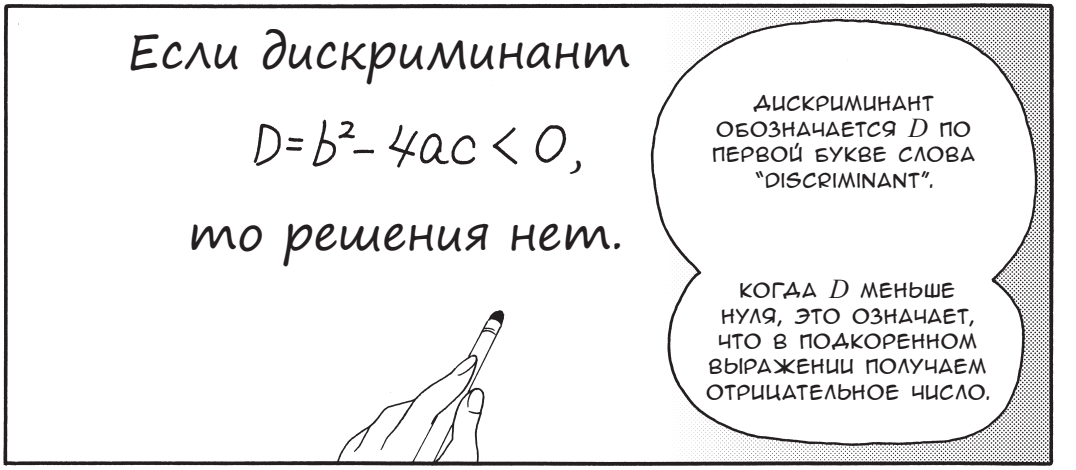
$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times(-100)}}{2\times1}=\frac{5\pm\sqrt{25+400}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{425}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{25\times17}}{2}=\frac{5\pm5\sqrt{17}}{2}$$

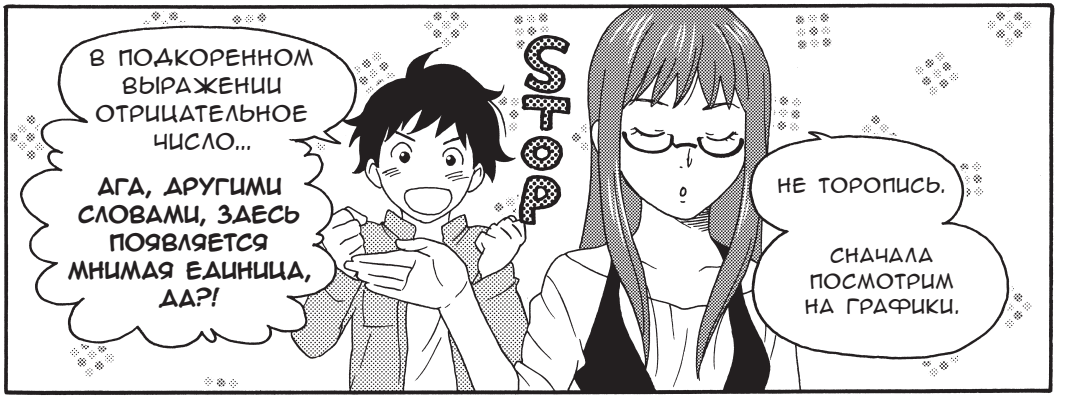


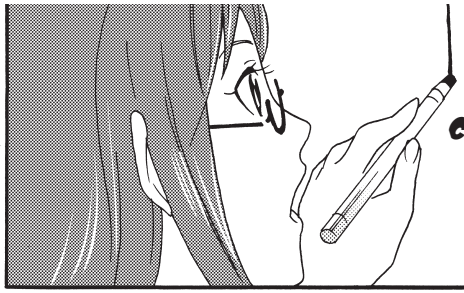



ХОРОШАЯ РАБОТА!
ВЖИХ
ЭТО БЫЛО КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ, КОТОРОЕ ИМЕЕТ РЕШЕНИЕ. А БЫВАЮТ ТАКИЕ, КОТОРЫЕ НЕЛЬЗЯ РЕШИТЬ.
ЭТО ТЕ, КОТОРЫЕ ВАС РАЗДРАЖАЮТ, ДА?


ОПРЕДЕЛИТЬ, ИМЕЕТ КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЕ ИЛИ НЕТ, МОЖНО, ЗНАЯ ЕГО ДИСКРИМИНАНТ D. ЕСЛИ ЗНАЧЕНИЕ D ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ...
СКРИП
ТО УРАВНЕНИЕ НЕЛЬЗЯ РЕШИТЬ.


Если дискриминант
$D=b^2-4ac<0$,
то решения нет.
ДИСКРИМИНАНТ ОБОЗНАЧАЕТСЯ D ПО ПЕРВОЙ БУКВЕ СЛОВА "DISCRIMINANT".
КОГДА D МЕНЬШЕ НУЛЯ, ЭТО ОЗНАЧАЕТ, ЧТО В ПОДКОРЕННОМ ВЫРАЖЕНИИ ПОЛУЧАЕМ ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО.

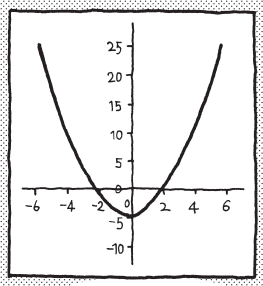

В ПОДКОРЕННОМ ВЫРАЖЕНИИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО...
АГА, ДРУГИМИ СЛОВАМИ, ЗДЕСЬ ПОЯВЛЯЕТСЯ МНИМАЯ ЕДИНИЦА, ДА?!
STOP
НЕ ТОРОПИСЬ.
СНАЧАЛА ПОСМОТРИМ НА ГРАФИКИ.



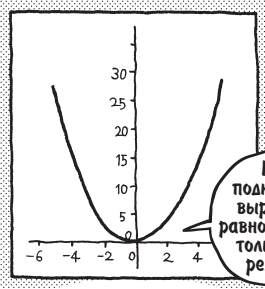
СКРИП

НАПРАВЛЕНИЕ ВЕТВЕЙ ПАРАБОЛЫ НА ГРАФИКЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЗАВИСИТ ОТ ЗНАКА СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА *a*. ЕСЛИ ОН ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ, ВЕТВИ ПАРАБОЛЫ НАПРАВЛЕНЫ ВВЕРХ, И НАОБОРОТ. РАССМОТРИМ ГРАФИКИ ДЛЯ ОБОИХ СЛУЧАЕВ.

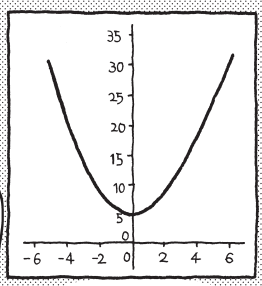
$ax^2+bx+c=0$, когда a – положительный



Если D > 0

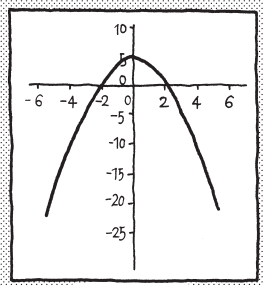


Если D = 0

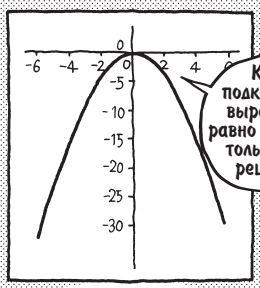


Если D < 0

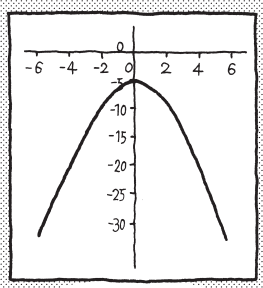
$ax^2+bx+c=0$, когда a – отрицательный



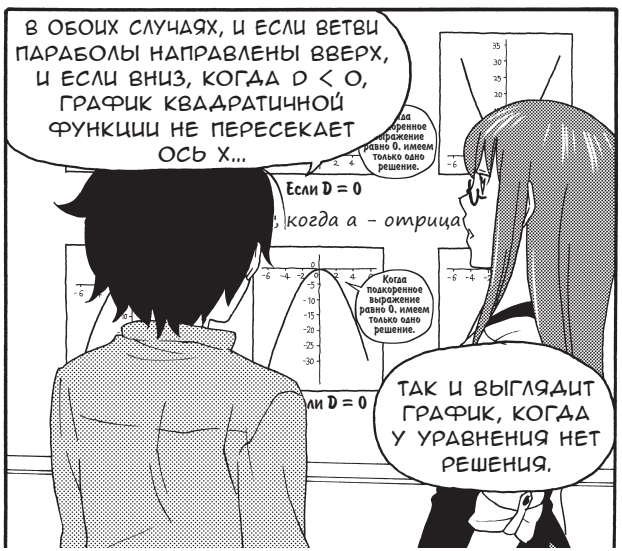
Если D > 0



Если D = 0



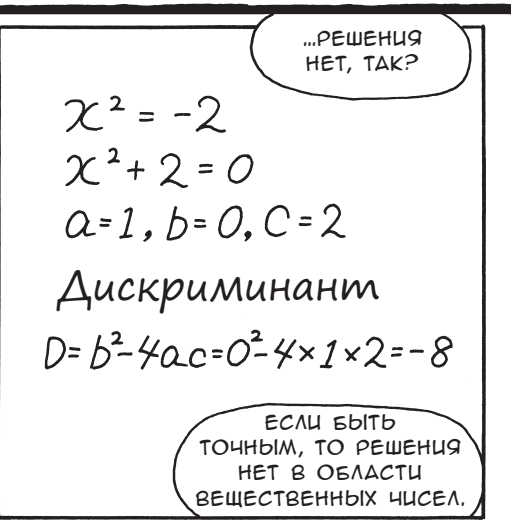
Если D < 0

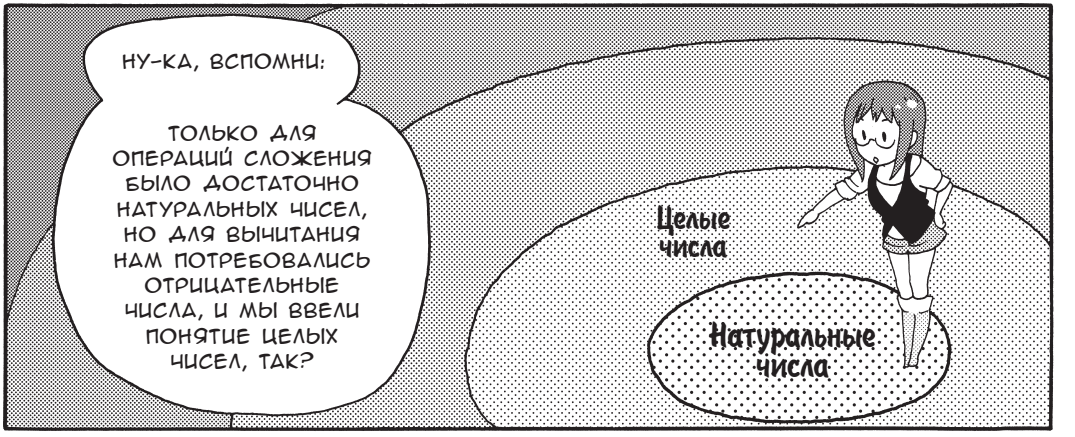




3. ВВЕДЯ МНИМУЮ ЕДИНИЦУ i, МОЖНО РЕШИТЬ ЛЮБОЕ КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

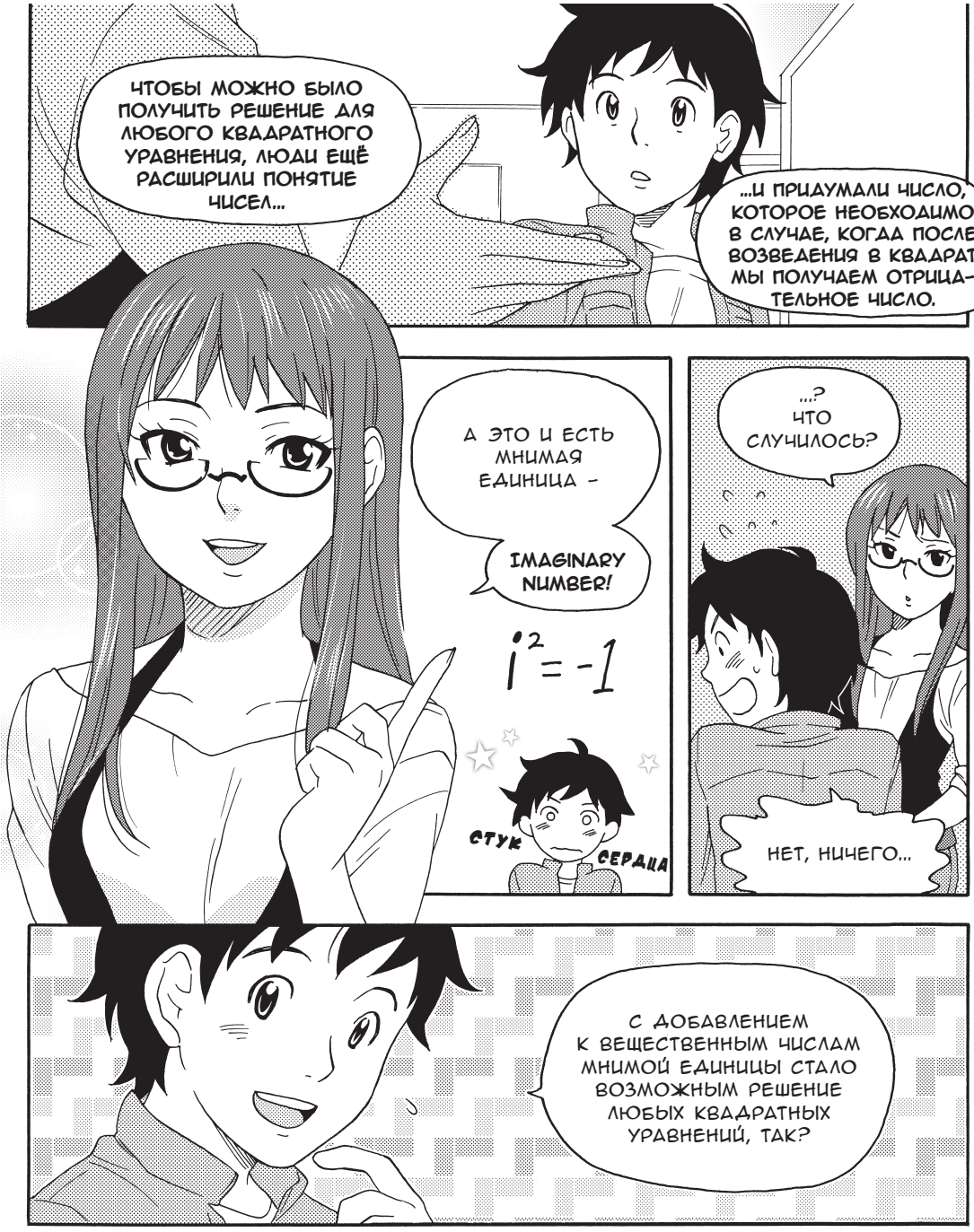




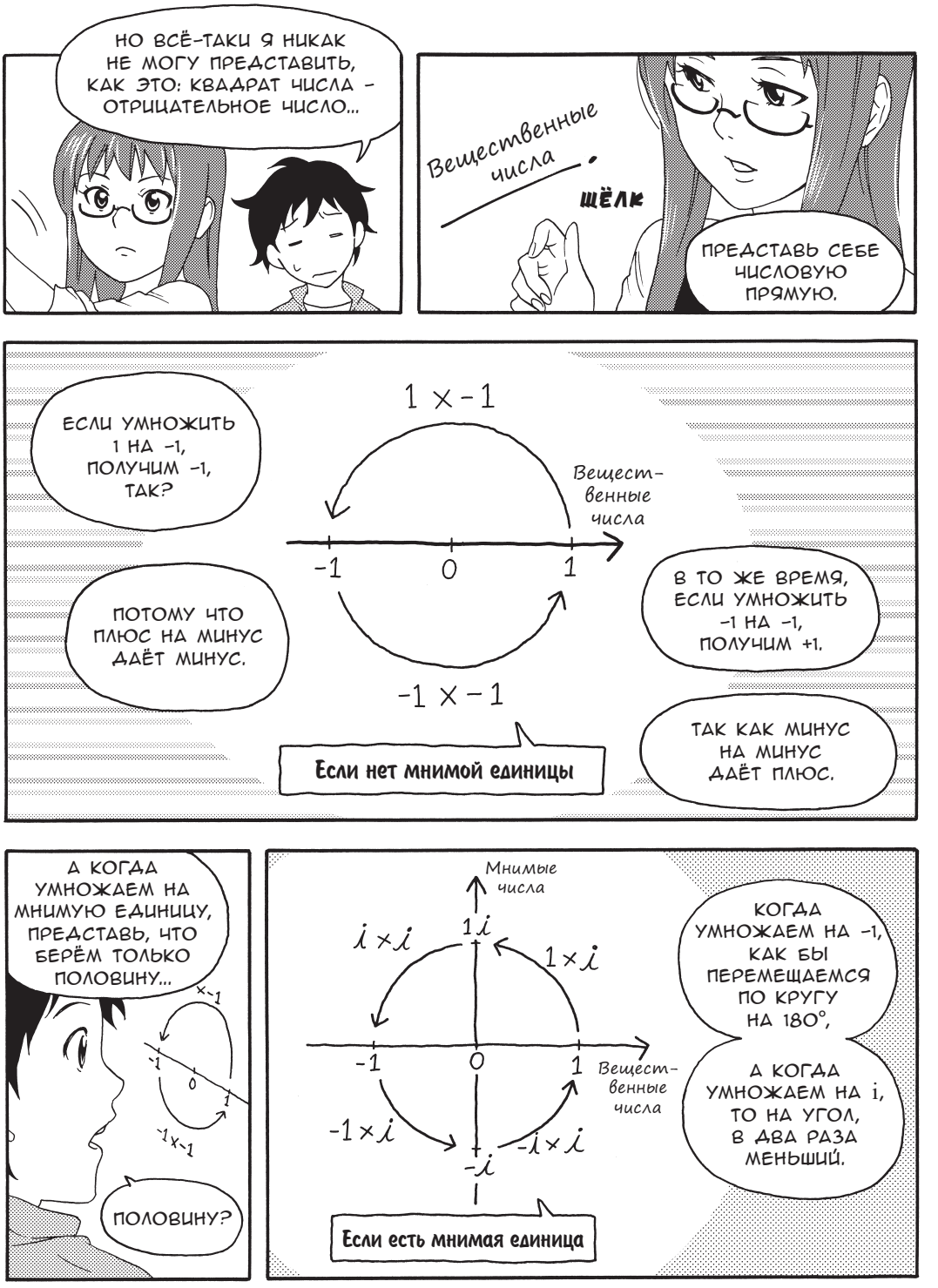


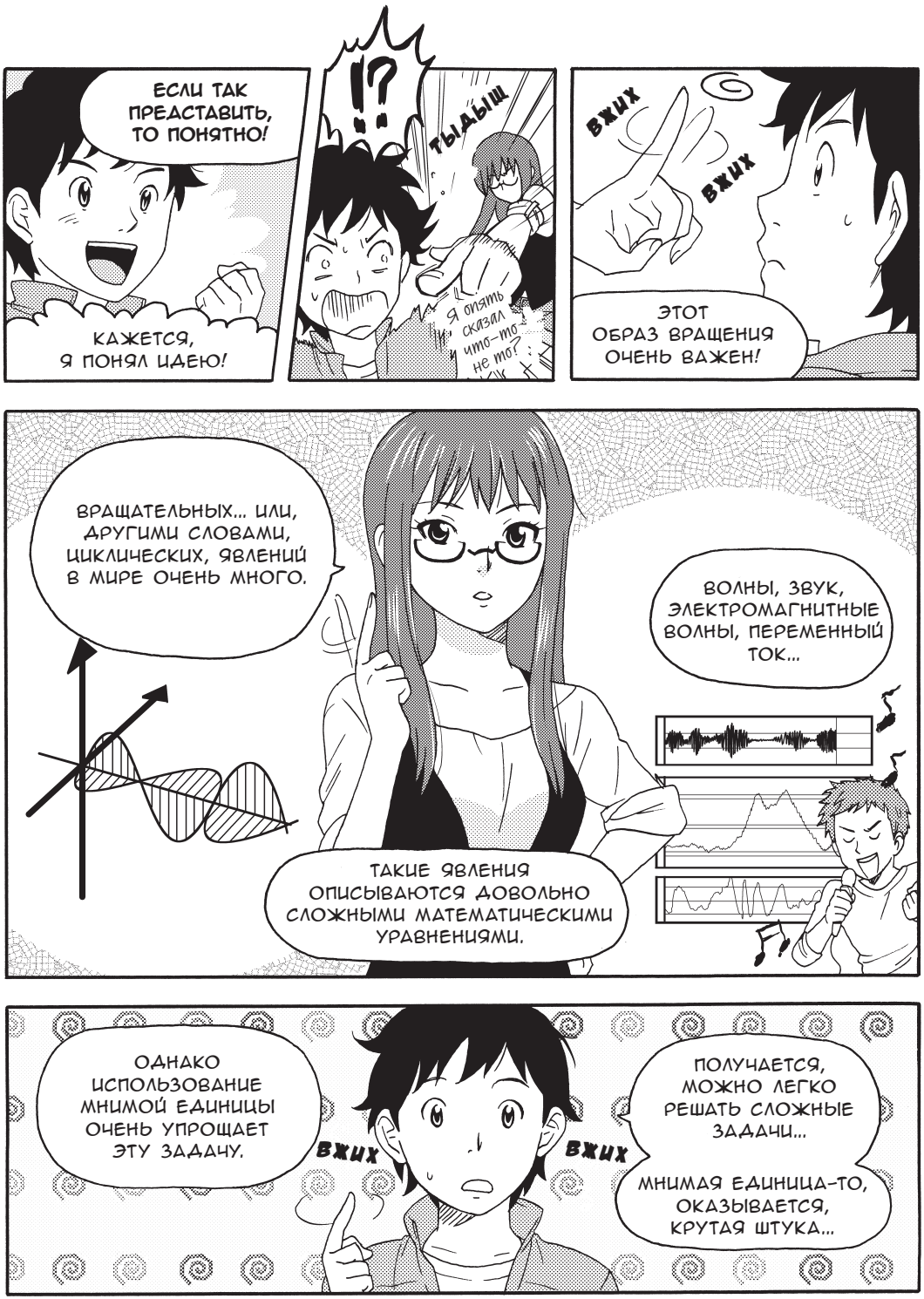


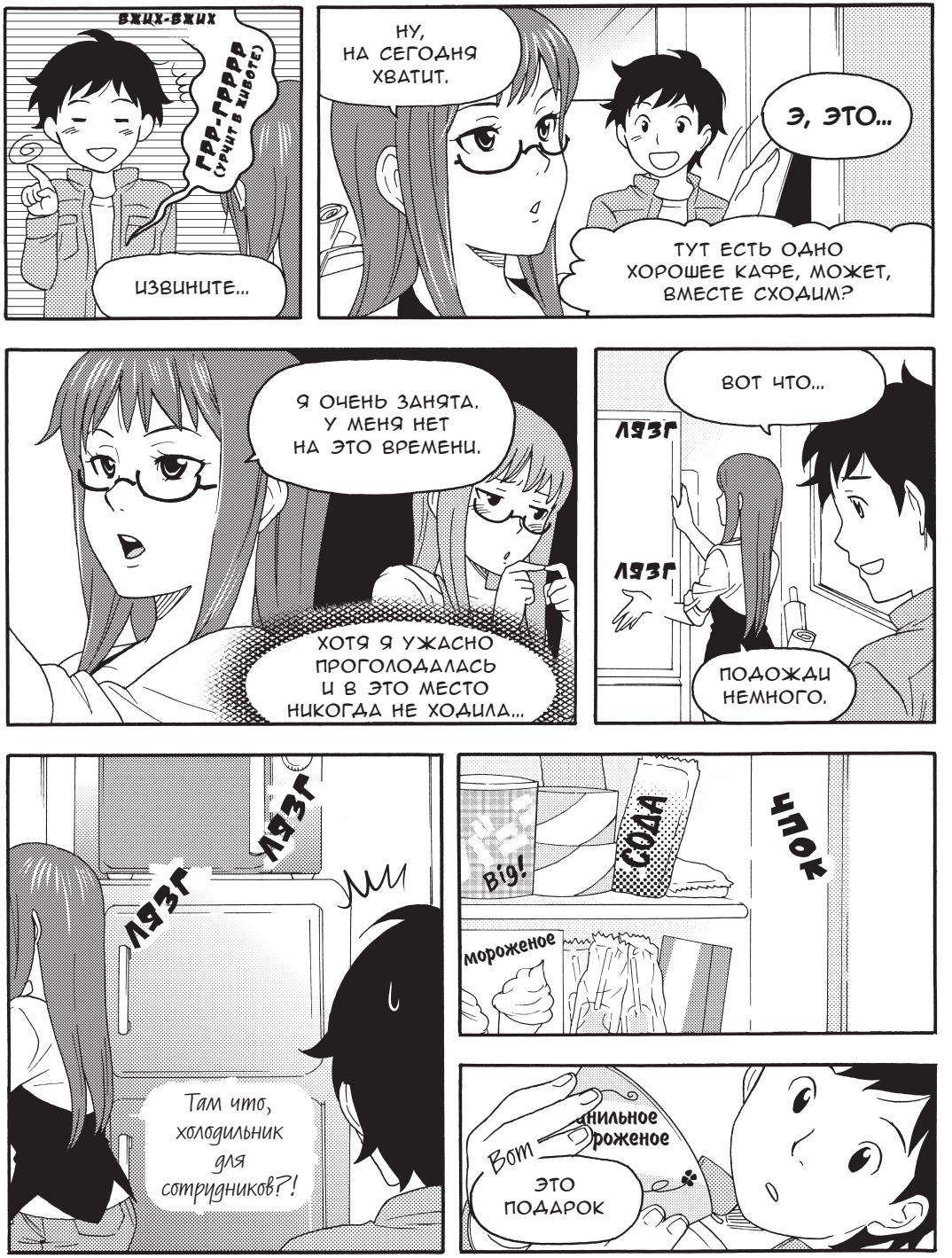


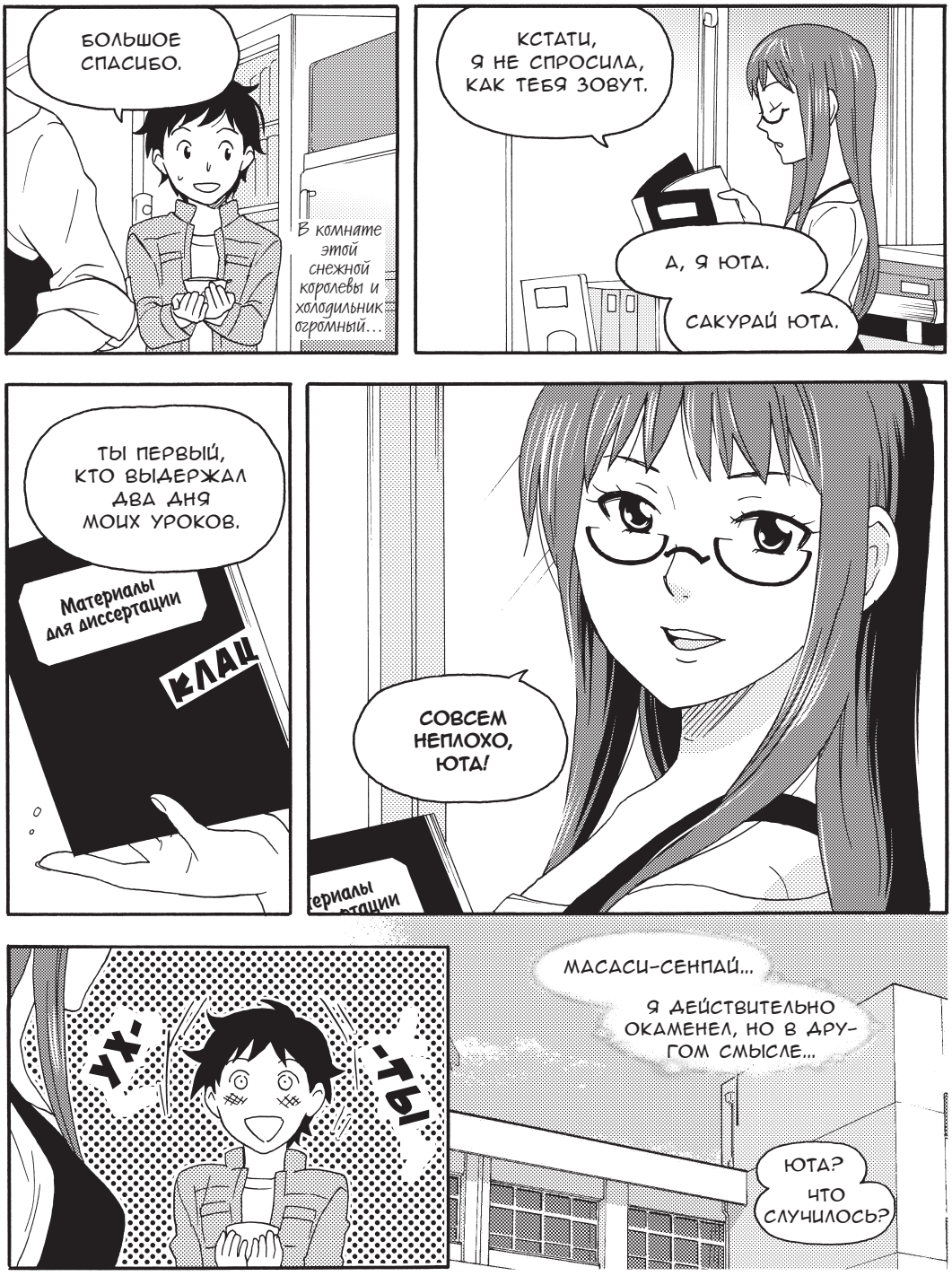


Так как $i^2 = -1$, то $i = \pm\sqrt{-1}$.
Однако если $i = \sqrt{-1}$, то можно записать, что $-\sqrt{-1} = -i$.
Поэтому в этой книге мы будем считать, что $i = \sqrt{-1}$.


НО ВСЁ-ТАКИ Я НИКАК НЕ МОГУ ПРЕДСТАВИТЬ, КАК ЭТО: КВАДРАТ ЧИСЛА – ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО...
Вещественные числа
ЩЁЛК
ПРЕДСТАВЬ СЕБЕ ЧИСЛОВУЮ ПРЯМУЮ.
ЕСЛИ УМНОЖИТЬ 1 НА –1, ПОЛУЧИМ –1, ТАК?
1 × –1
Вещест-венные числа
-1
0
1
ПОТОМУ ЧТО ПЛЮС НА МИНУС ДАЁТ МИНУС.
В ТО ЖЕ ВРЕМЯ, ЕСЛИ УМНОЖИТЬ –1 НА –1, ПОЛУЧИМ +1.
-1 × –1
ТАК КАК МИНУС НА МИНУС ДАЁТ ПЛЮС.
Если нет мнимой единицы
А КОГДА УМНОЖАЕМ НА МНИМУЮ ЕДИНИЦУ, ПРЕДСТАВЬ, ЧТО БЕРЁМ ТОЛЬКО ПОЛОВИНУ...
ПОЛОВИНУ?
Мнимые числа
1i
i × i
1 × i
-1 × i
-i × i
-i
КОГДА УМНОЖАЕМ НА –1, КАК БЫ ПЕРЕМЕЩАЕМСЯ ПО КРУГУ НА 180°,
А КОГДА УМНОЖАЕМ НА i, ТО НА УГОЛ, В ДВА РАЗА МЕНЬШИЙ.
Если есть мнимая единица

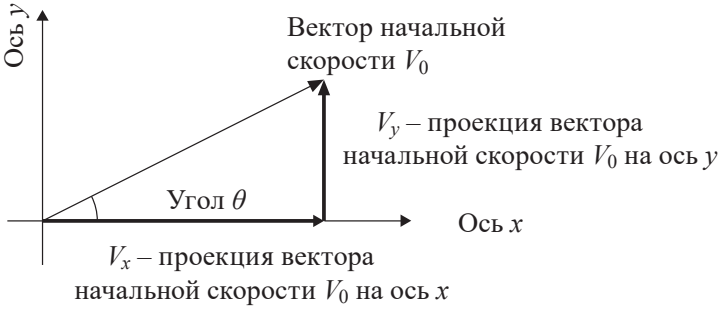

ЕСЛИ ТАК ПРЕДСТАВИТЬ, ТО ПОНЯТНО!
КАЖЕТСЯ, Я ПОНЯЛ ИДЕЮ!
!?
ТЫДЫЩ
Я опять сказал что-то не то?..
ВЖИХ
ВЖИХ
ЭТОТ ОБРАЗ ВРАЩЕНИЯ ОЧЕНЬ ВАЖЕН!
ВРАЩАТЕЛЬНЫХ... ИЛИ, ДРУГИМИ СЛОВАМИ, ЦИКЛИЧЕСКИХ, ЯВЛЕНИЙ В МИРЕ ОЧЕНЬ МНОГО.
ВОЛНЫ, ЗВУК, ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ, ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК...
ТАКИЕ ЯВЛЕНИЯ ОПИСЫВАЮТСЯ ДОВОЛЬНО СЛОЖНЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ.
ОДНАКО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНИМОЙ ЕДИНИЦЫ ОЧЕНЬ УПРОЩАЕТ ЭТУ ЗАДАЧУ.
ВЖИХ
ВЖИХ
ПОЛУЧАЕТСЯ, МОЖНО ЛЕГКО РЕШАТЬ СЛОЖНЫЕ ЗАДАЧИ...
МНИМАЯ ЕДИНИЦА-ТО, ОКАЗЫВАЕТСЯ, КРУТАЯ ШТУКА...


вхих-вхих
ГРР-ГРРРР (урчит в животе)
Извините...
Ну, на сегодня хватит.
Э, это...
Тут есть одно хорошее кафе, может, вместе сходим?
Я очень занята. У меня нет на это времени.
Хотя я ужасно проголодалась и в это место никогда не ходила...
Вот что...
ляэг
ляэг
Подожди немного.
ляэг
ляэг
Там что, холодильник для сотрудников?!
Big!
Сода
чпок
мороженое
Вот
ЭТО ПОДАРОК

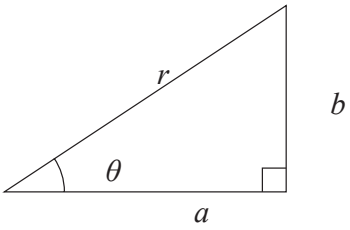

БОЛЬШОЕ СПАСИБО.
В комнате этой снежной королевы и холодильник огромный…
КСТАТИ, Я НЕ СПРОСИЛА, КАК ТЕБЯ ЗОВУТ.
А, Я ЮТА.
САКУРАЙ ЮТА.
ТЫ ПЕРВЫЙ, КТО ВЫДЕРЖАЛ ДВА ДНЯ МОИХ УРОКОВ.
Материалы для диссертации
КЛАЦ
СОВСЕМ НЕПЛОХО, ЮТА!
МАСАСИ-СЕНПАЙ…
Я ДЕЙСТВИТЕЛЬНО ОКАМЕНЕЛ, НО В ДРУГОМ СМЫСЛЕ…
ЮТА? ЧТО СЛУЧИЛОСЬ?
УХ
-ТЫ

Ч. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим такой пример: из некоторой точки брошен мяч под углом θ, задача – определить его положение в любой момент времени. Обозначим начальную скорость мяча за V_0 и будем считать, что сопротивление воздуха отсутствует. Нарисуем чертёж:



На брошенный мяч действует сила тяжести, направленная вдоль оси y вертикально вниз. Ускорение свободного падения также направлено вертикально вниз. Значит, по горизонтали мяч будет двигаться с постоянной скоростью, а по вертикали – с постоянным ускорением.



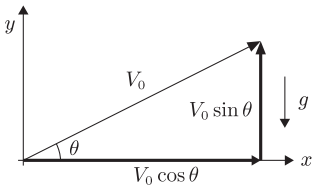
Ниже представлены тригонометрические функции. Если подставить в эти функции известные значения, можно легко вычислить неизвестные искомые параметры.

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Согласно нашему чертежу, проекция вектора начальной скорости V_0 на ось x равна $V_{0x} = V_0 \cos\theta$, а проекция V_0 на ось y – $V_{0y} = V_0 \sin\theta$.

Старшеклассники часто говорят, что они не любят тригонометрию. Тригонометрические функции возникают и используются в физике везде, где нужно изучать колебания.

Вернёмся к нашему чертежу. Зная проекции вектора начальной скорости на оси x и y, обозначив время за t, выпишем уравнения изменения вертикальной V_y и горизонтальной V_x компонент скорости от времени:



$$V_y = -gt + V_0 \sin\theta \qquad V_x = V_0 \cos\theta$$

Скорость – это производная расстояния по времени. А значит, для нахождения зависимости координат мяча $x(t)$, $y(t)$ от времени проинтегрируем оба уравнения по времени t:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 (\sin\theta)\, t + y_0 \qquad x = V_0 (\cos\theta)\, t + x_0$$

Так как x_0 и y_0 – координаты мяча по горизонтали и по вертикали в начальный момент времени $t = 0$, они называются «начальные значения». Пусть для примера мяч бросают с начальной скоростью $V_0 = 30$м/с (или 108 км/ч), под углом θ, равным 30°, с высоты 10 метров, т. е. $x_0 = 0$ и $y_0 = 10$. Если нам нужно найти координаты точки приземления мяча, подставим в наши уравнения $y = 0$ м, и, считая ускорение свободного падения равным $g = 9.8$ м/с^2, получим:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2 + 30 (\sin 30°)\, t + 10 \\ 0 &= -4.9t^2 + 30 \times \frac{1}{2} t + 10 \\ 0 &= -4.9t^2 + 15t + 10 \end{aligned}$$

Теперь можно решить квадратное уравнение и найти продолжительность полёта мяча:

$$\begin{aligned} t &= \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \times (-4.9) \times 10}}{2 \times (-4.9)} \\ &= \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 196}}{-9.8} \\ &= \frac{-15 \pm 20.52}{-9.8} \\ &= -0.56,\ 3.62 \end{aligned}$$

Так как время не может быть отрицательным, получаем, что мяч приземлится через 3,62 с. Теперь в уравнение $x(t) = V_0(\cos\theta)t + x_0$ подставим значения $V_0 = 30$, $\theta = 30°$, $t = 3{,}62$ и $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} x &= V_0(\cos\theta)\,t + x_0 \\ &= 30 \times (\cos 30°) \times 3.62 + 0 \\ &= 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3.62 \\ &= 94.05 \end{aligned}$$

Дальность полёта мяча составила 94,05 метра.

В мире много явлений, таких как переменный ток, электромагнитные волны, звук, – они называются колебаниями. Тригонометрические функции являются очень удобным и необходимым инструментом для изучения колебаний. Ученики старших классов, которые планируют в будущем заниматься точными науками, должны уметь хорошо пользоваться тригонометрическими функциями, независимо от того, нравится им тригонометрия или нет.

Если вы уже учитесь на факультете, связанном с точными науками, но не чувствуете уверенности в тригонометрических функцях, пожалуйста, как следует изучите этот вопрос.

5. ВЫВЕДЕНИЕ ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Покажем, как получается формула для корней квадратного уравнения.

В уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ разделим обе части на a. Здесь возникает условие, что a не должно быть равно 0.

У нас получилось уравнение $x^2 + (b/a)x + c/a = 0$.

Мы хотим свернуть это выражение в виде квадрата какого-нибудь числа $(u + v)^2$. Для этого перенесём c/a в правую часть уравнения и к обеим частям уравнения прибавим выражение $(b/2a)^2$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

Пользуясь известным фактом $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, получим:

Так как любое число при умножении на 0 равно 0, то напишем формально:

$0 = x \cdot 0 = y \cdot 0$.

Получается, что $x = y$ при любых x и y. Вот почему на 0 делить нельзя.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

Теперь мы можем извлечь корень из обеих частей уравнения. У нас получится два решения: одно положительное, другое – отрицательное:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}$$

Теперь отсюда можно выразить *x*:

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}} \\
&= -\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}} \\
&= -\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \\
&= -\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac} \\
&= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Мы получили общую формулу корней квадратного уравнения. Если вдруг вы её забудете, теперь вы всегда можете снова её вывести.

Если коэффициент *b* – чётное число, то можно подставить вместо него $b' = b/2$, то есть $b = 2b'$, а значит:

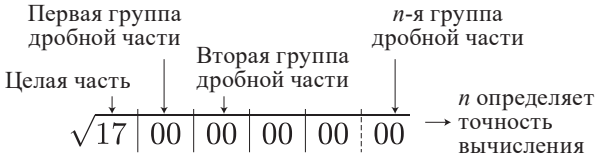
$$\begin{aligned}
x &= \frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a} \\
&= \frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a} \\
&= \frac{-2b'\pm 2\sqrt{b'^2-ac}}{2a} \\
&= \frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}
\end{aligned}$$

Мы получили упрощённую формулу для случая, когда второй коэффициент квадратного уравнения делится на 2.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

При решении задачи про прямоугольник плодащью 100 м^2, одна сторона которого длиннее другой на 5 метров, мы получили, что длина стороны содержит $\sqrt{17}$. Если использовать калькулятор, то, конечно, можно быстро вычислить значение $\sqrt{17}$, но на экзаменах часто запрещено пользоваться калькулятором. В то же время, если знаешь хоть приблизительное значение корня, можно оценить правильность ответа. Рассмотрим способ вычисления корней без калькулятора на примере $\sqrt{17}$.

① Число под знаком корня разделим на группы из двух цифр. В случае $\sqrt{17}$ это будет выглядеть как 17 00 00 00.

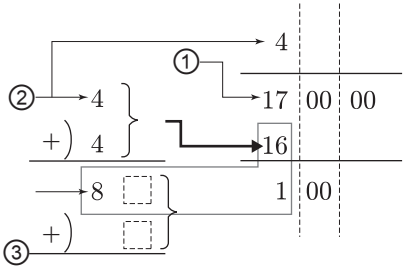


② Для числа, образованного самой левой группой из двух цифр, находим самое большое целое число, квадрат которого не превышает число, образованное этой группой цифр.

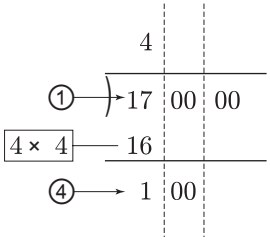
Так как $4^2 = 16$, а $5^2 = 25$, то искомым наибольшим целым числом, квадрат котого не превышает 17, является 4. Как показано на схеме внизу, записываем 4 над числом 17, а также слева число 4 и сразу под ним ещё раз число 4.

③ $4 \cdot 4 = 16$, записываем это под числом 17. Вычитаем $17 - 16 = 1$ и записываем результат под числом 16.

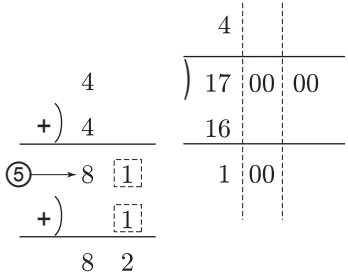
Вычисляем $4 + 4 = 8$ и записываем под нижней цифрой 4 слева.



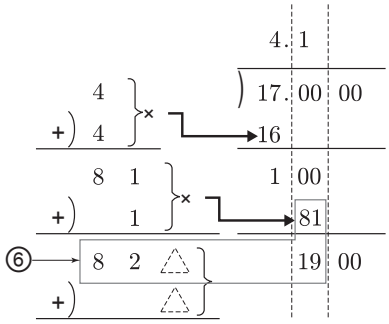
④ К полученному результату 17 − 16 = 1 дописываем следующие две цифры и получаем 100.



⑤ Теперь ищем такую цифру [?], чтобы перемножение 8[?]·[?] не превышало 100. Если предположить, что [?] равно 2, то получим 8[2]·[2] = 164, это больше 100, следовательно, на месте [?] должна быть 1. Дописываем в верхней части к нашему ответу 1, не забывая в нужном месте поставить десятичную запятую.

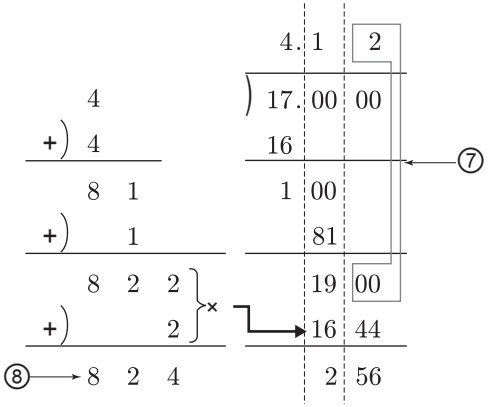


⑥ Результат вычисления 8[1]·[1] = 81 записываем под 100, производим вычитание и результат 19 пишем ниже. Слева же записываем 8[1] + [1] = 82.



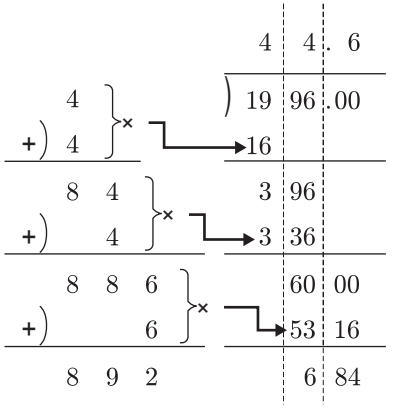
⑦ Справа к 19 добавляем следующие две цифры, получаем 1900. Теперь нужно найти самое большое целое число {?}, при котором 82{?}·{?} должно быть не больше 1900. 822·2 = 1644, 823·3 = 2469, поэтому искомое число равно 2. К ответу, записываемому сверху, добавляем ещё цифру 2, получаем 4,12.

⑧ Результат 822·2 = 1644 записываем под 1900, а слева пишем результат суммы 822 + 2 = 824.



И далее продолжаем в том же духе.

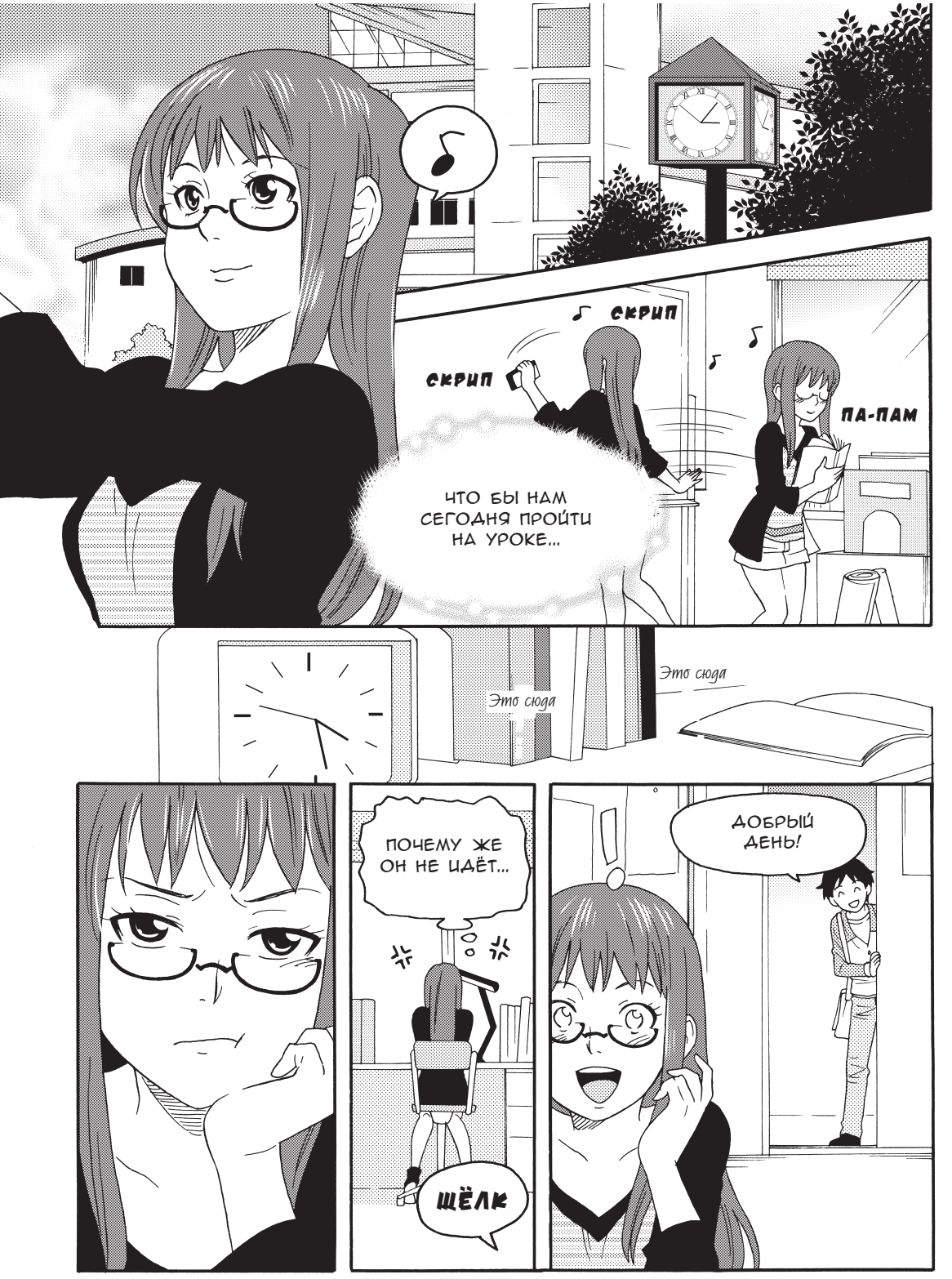
Рассмотрим пример вычисления тем же способом корня из 1996:

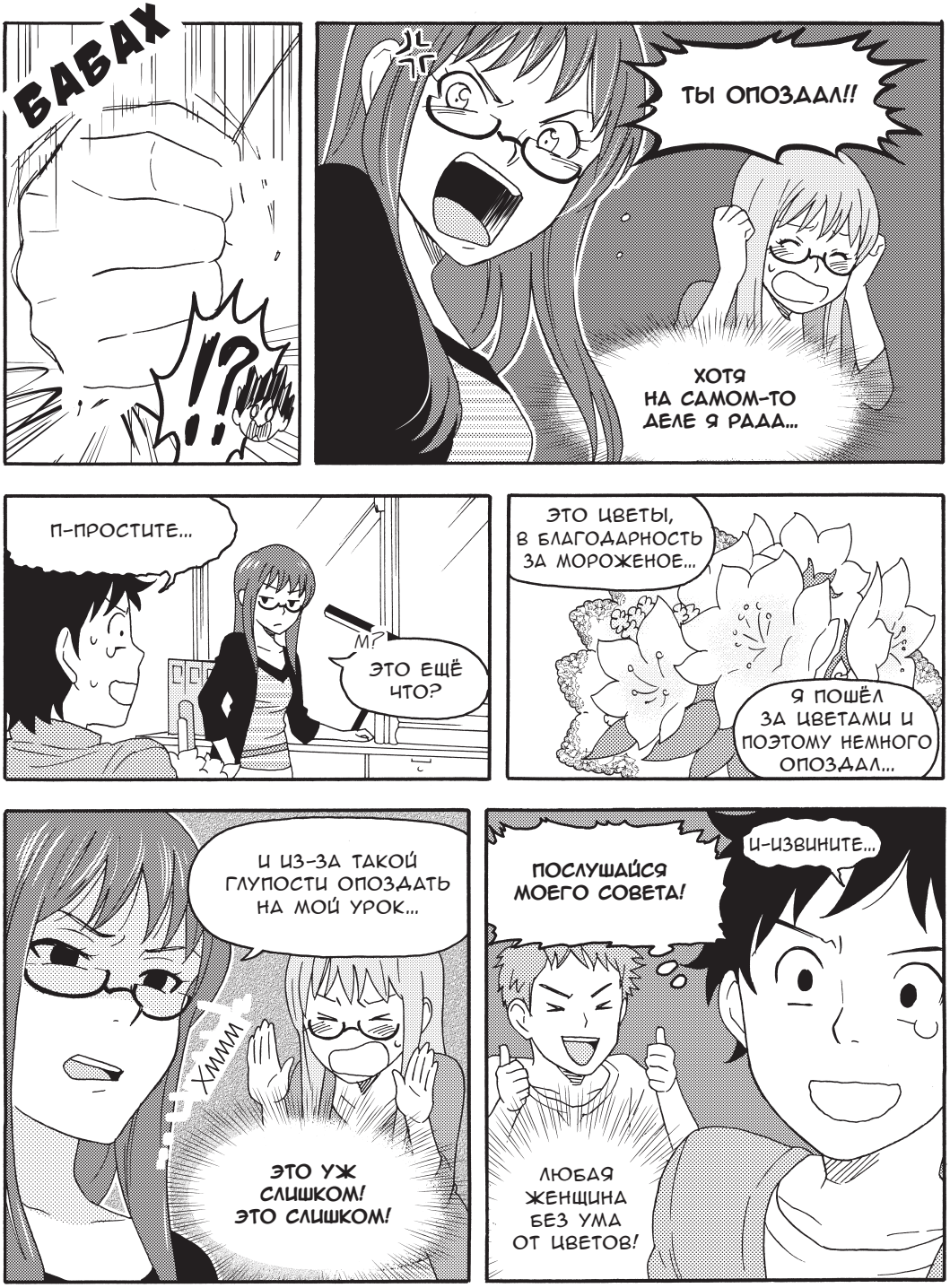


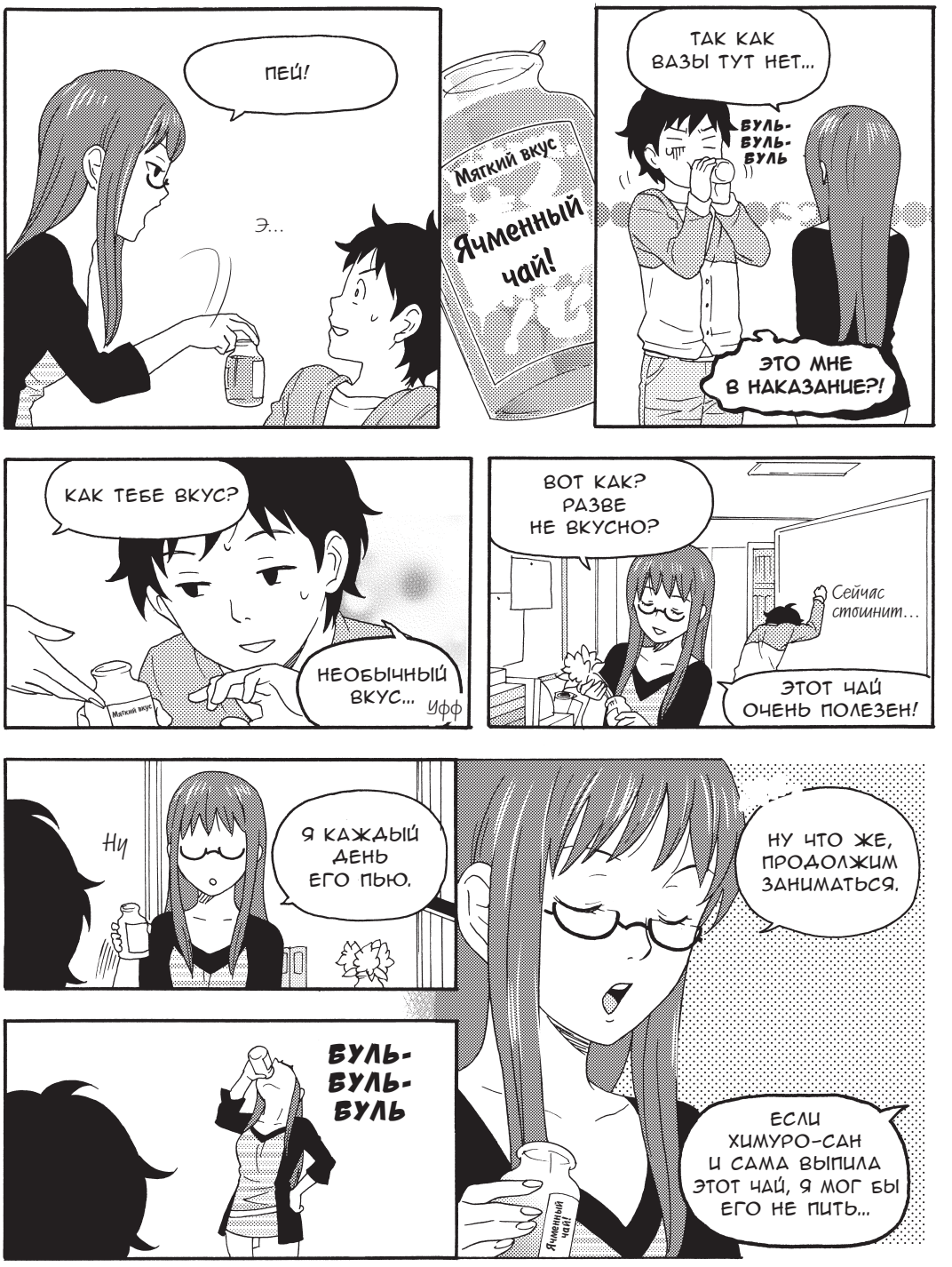
Глава

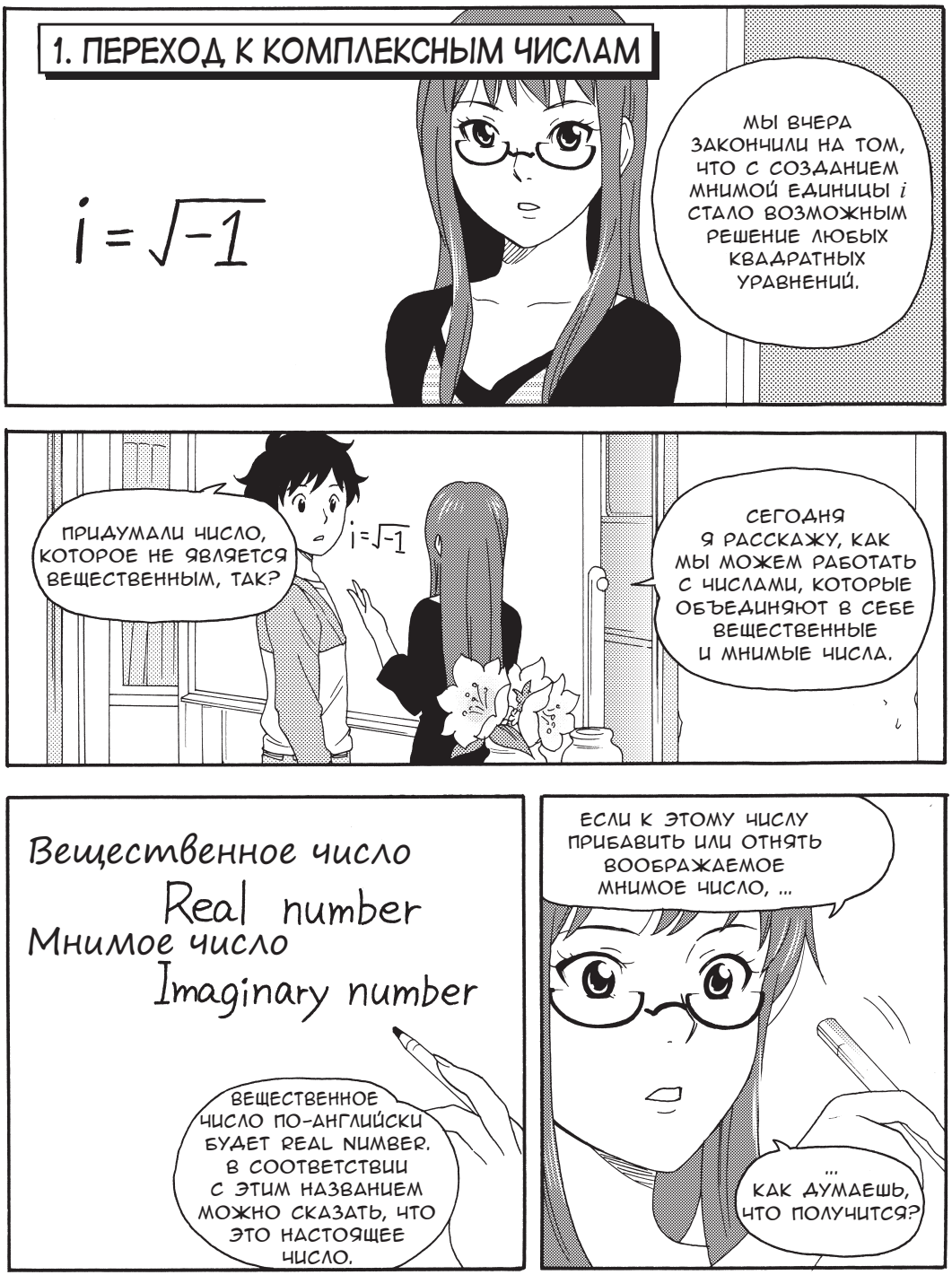


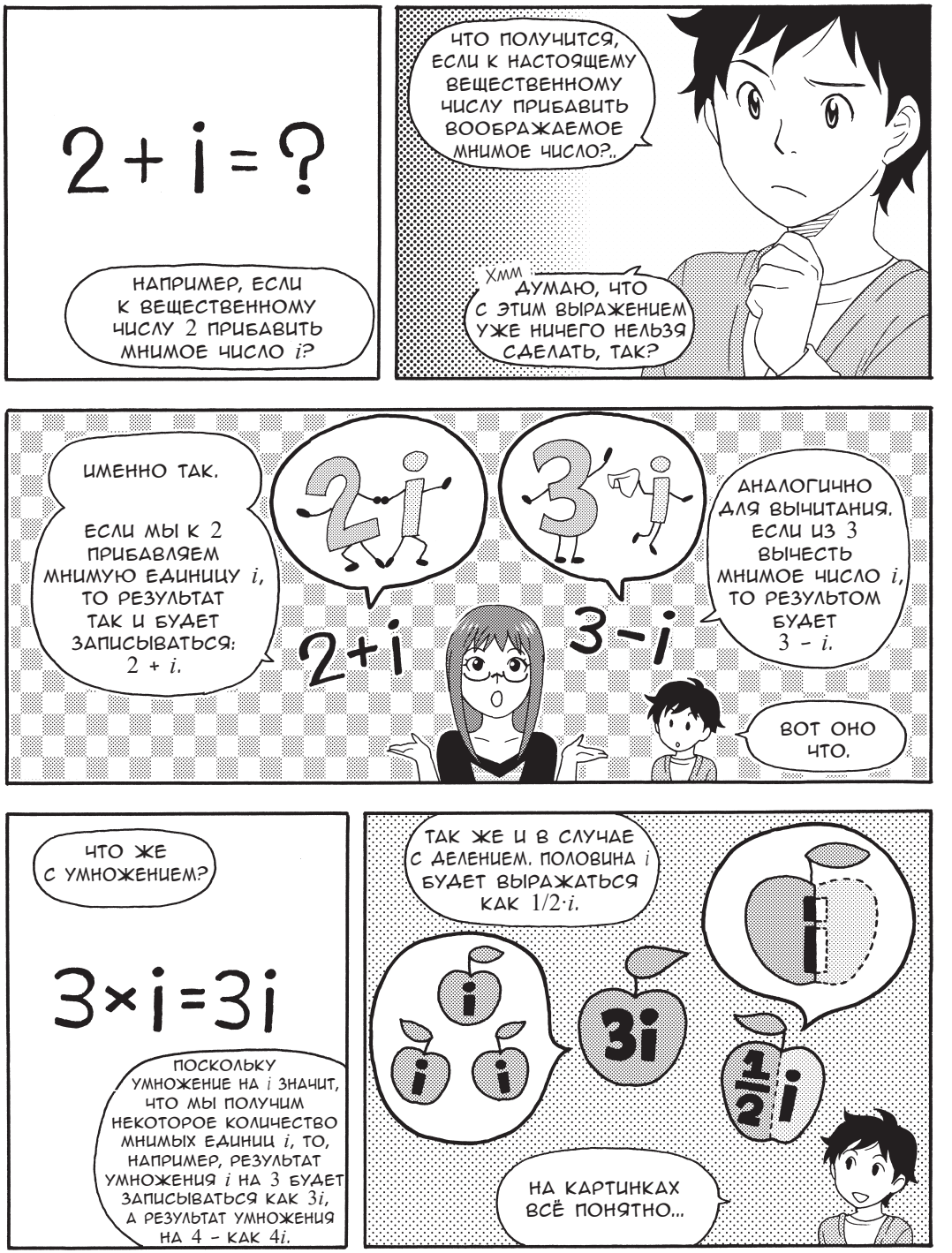
ОТ МНИМОЙ ЕДИНИЦЫ i К КОМПЛЕКСНОМУ ЧИСЛУ $a + bi$


скрип
скрип
па-пам
что бы нам сегодня пройти на уроке...
Это сюда
Это сюда
почему же он не идёт...
щёлк
добрый день!

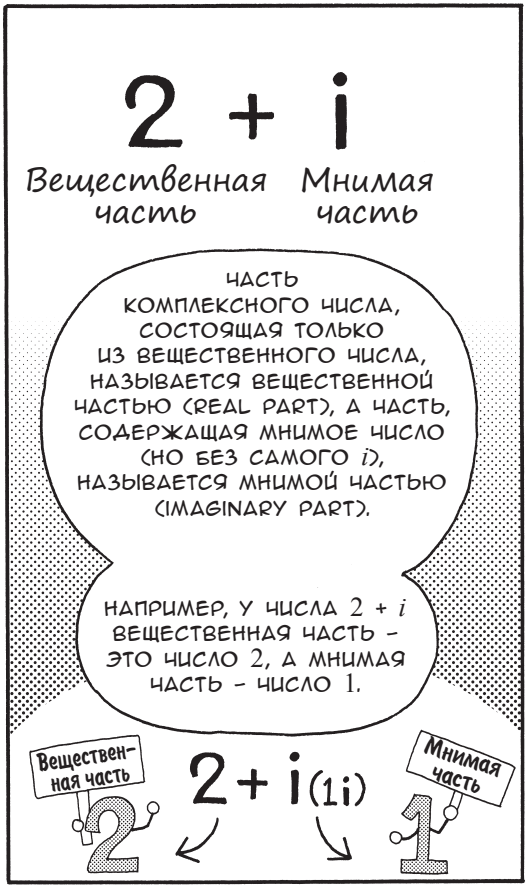

БАБАХ
!?
ТЫ ОПОЗДАЛ!!
ХОТЯ НА САМОМ-ТО ДЕЛЕ Я РАДА...
П-ПРОСТИТЕ...
М?
ЭТО ЕЩЁ ЧТО?
ЭТО ЦВЕТЫ, В БЛАГОДАРНОСТЬ ЗА МОРОЖЕНОЕ...
Я ПОШЁЛ ЗА ЦВЕТАМИ И ПОЭТОМУ НЕМНОГО ОПОЗДАЛ...
И ИЗ-ЗА ТАКОЙ ГЛУПОСТИ ОПОЗДАТЬ НА МОЙ УРОК...
ХЛЛЛЛЛ
ЭТО УЖ СЛИШКОМ! ЭТО СЛИШКОМ!
И-ИЗВИНИТЕ...
ПОСЛУШАЙСЯ МОЕГО СОВЕТА!
ЛЮБАЯ ЖЕНЩИНА БЕЗ УМА ОТ ЦВЕТОВ!


ПЕЙ!
Э...
Мягкий вкус
Ячменный чай!
ТАК КАК ВАЗЫ ТУТ НЕТ...
БУЛЬ-БУЛЬ-БУЛЬ
ЭТО МНЕ В НАКАЗАНИЕ?!
КАК ТЕБЕ ВКУС?
НЕОБЫЧНЫЙ ВКУС... УФФ
ВОТ КАК? РАЗВЕ НЕ ВКУСНО?
Сейчас стошнит...
ЭТОТ ЧАЙ ОЧЕНЬ ПОЛЕЗЕН!
НУ
Я КАЖДЫЙ ДЕНЬ ЕГО ПЬЮ.
БУЛЬ-БУЛЬ-БУЛЬ
НУ ЧТО ЖЕ, ПРОДОЛЖИМ ЗАНИМАТЬСЯ.
ЕСЛИ ХИМУРО-САН И САМА ВЫПИЛА ЭТОТ ЧАЙ, Я МОГ БЫ ЕГО НЕ ПИТЬ...
Ячменный чай


1. ПЕРЕХОД К КОМПЛЕКСНЫМ ЧИСЛАМ
$i = \sqrt{-1}$
МЫ ВЧЕРА ЗАКОНЧИЛИ НА ТОМ, ЧТО С СОЗДАНИЕМ МНИМОЙ ЕДИНИЦЫ i СТАЛО ВОЗМОЖНЫМ РЕШЕНИЕ ЛЮБЫХ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ.
ПРИДУМАЛИ ЧИСЛО, КОТОРОЕ НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ВЕЩЕСТВЕННЫМ, ТАК?
$i = \sqrt{-1}$
СЕГОДНЯ Я РАССКАЖУ, КАК МЫ МОЖЕМ РАБОТАТЬ С ЧИСЛАМИ, КОТОРЫЕ ОБЪЕДИНЯЮТ В СЕБЕ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ И МНИМЫЕ ЧИСЛА.
Вещественное число
Real number
Мнимое число
Imaginary number
ВЕЩЕСТВЕННОЕ ЧИСЛО ПО-АНГЛИЙСКИ БУДЕТ REAL NUMBER. В СООТВЕТСТВИИ С ЭТИМ НАЗВАНИЕМ МОЖНО СКАЗАТЬ, ЧТО ЭТО НАСТОЯЩЕЕ ЧИСЛО.
ЕСЛИ К ЭТОМУ ЧИСЛУ ПРИБАВИТЬ ИЛИ ОТНЯТЬ ВООБРАЖАЕМОЕ МНИМОЕ ЧИСЛО, ...
...
КАК ДУМАЕШЬ, ЧТО ПОЛУЧИТСЯ?


2+i=?
НАПРИМЕР, ЕСЛИ К ВЕЩЕСТВЕННОМУ ЧИСЛУ 2 ПРИБАВИТЬ МНИМОЕ ЧИСЛО i?
ЧТО ПОЛУЧИТСЯ, ЕСЛИ К НАСТОЯЩЕМУ ВЕЩЕСТВЕННОМУ ЧИСЛУ ПРИБАВИТЬ ВООБРАЖАЕМОЕ МНИМОЕ ЧИСЛО?..
ХММ
ДУМАЮ, ЧТО С ЭТИМ ВЫРАЖЕНИЕМ УЖЕ НИЧЕГО НЕЛЬЗЯ СДЕЛАТЬ, ТАК?
ИМЕННО ТАК.
ЕСЛИ МЫ К 2 ПРИБАВЛЯЕМ МНИМУЮ ЕДИНИЦУ i, ТО РЕЗУЛЬТАТ ТАК И БУДЕТ ЗАПИСЫВАТЬСЯ: 2 + i.
2i
3i
2+i
3−i
АНАЛОГИЧНО ДЛЯ ВЫЧИТАНИЯ. ЕСЛИ ИЗ 3 ВЫЧЕСТЬ МНИМОЕ ЧИСЛО i, ТО РЕЗУЛЬТОМ БУДЕТ 3 − i.
ВОТ ОНО ЧТО.
ЧТО ЖЕ С УМНОЖЕНИЕМ?
3×i=3i
ПОСКОЛЬКУ УМНОЖЕНИЕ НА i ЗНАЧИТ, ЧТО МЫ ПОЛУЧИМ НЕКОТОРОЕ КОЛИЧЕСТВО МНИМЫХ ЕДИНИЦ i, ТО, НАПРИМЕР, РЕЗУЛЬТАТ УМНОЖЕНИЯ i НА 3 БУДЕТ ЗАПИСЫВАТЬСЯ КАК 3i, А РЕЗУЛЬТАТ УМНОЖЕНИЯ НА 4 – КАК 4i.
ТАК ЖЕ И В СЛУЧАЕ С ДЕЛЕНИЕМ. ПОЛОВИНА i БУДЕТ ВЫРАЖАТЬСЯ КАК 1/2·i.
i
i
i
3i
i
1/2 i
НА КАРТИНКАХ ВСЁ ПОНЯТНО...

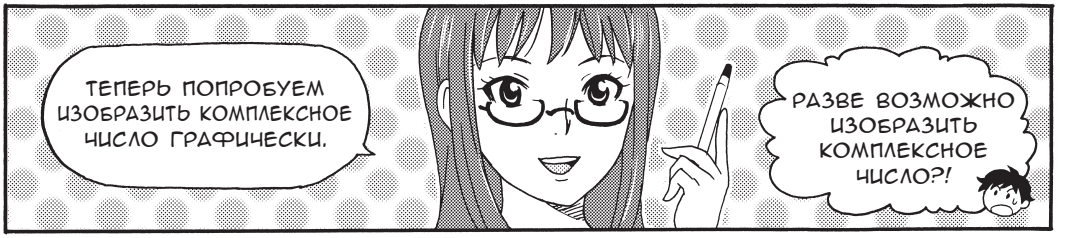

2 + i
Комплексное число
Complex number
Число, которое представляет из себя сумму вещественного и мнимого чисел, называется комплексным числом (complex number).
Смысл названия в том, что такое число объединяет в себе два числа - вещественное и мнимое (complex = = сложное).
Вещественное число
Мнимое число
Комплексное число

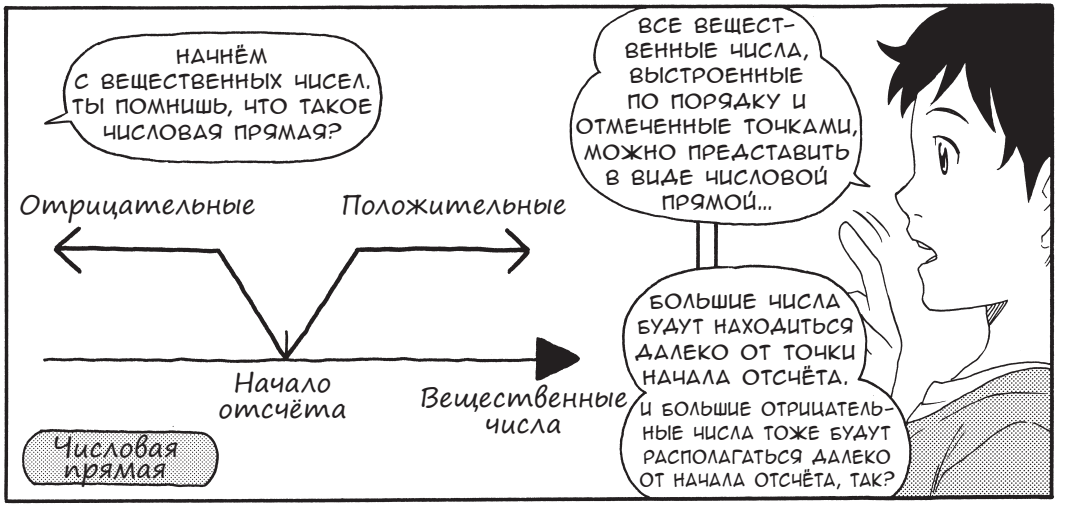

2 + i
Вещественная часть
Мнимая часть
Часть комплексного числа, состоящая только из вещественного числа, называется вещественной частью (real part), а часть, содержащая мнимое число (но без самого i), называется мнимой частью (imaginary part).
Например, у числа 2 + i вещественная часть - это число 2, а мнимая часть - число 1.
Вещественная часть
2 + i (1i)
Мнимая часть
2
1

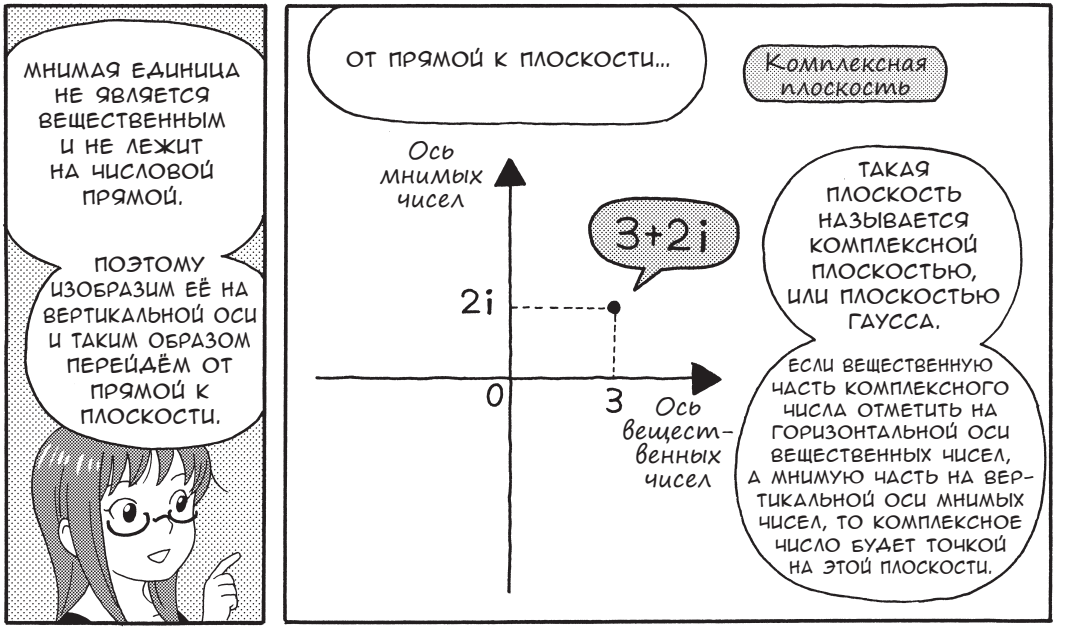

Так, а теперь назови вещественную и мнимую части числа –7 – 2i.

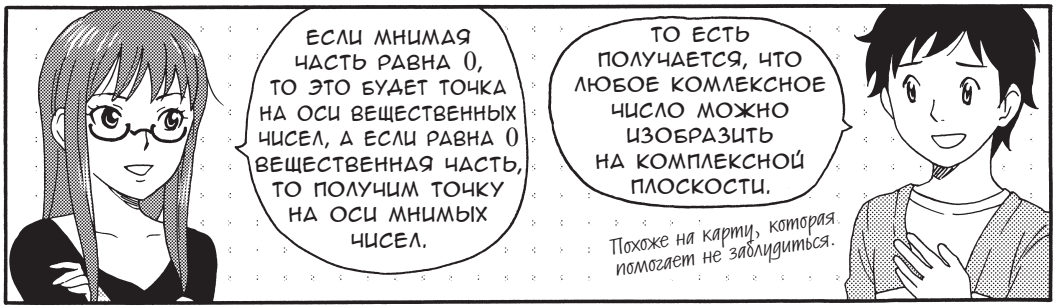

Хмммм... вещественная часть равна –7, а мнимая –2, так?
Вещественная часть
-7 -2 i
Мнимая часть
Отлично!
Значит, с написанием комплексных чисел мы разобрались.

2. СВОЙСТВА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ (МОДУЛЬ, АРГУМЕНТ) И КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ

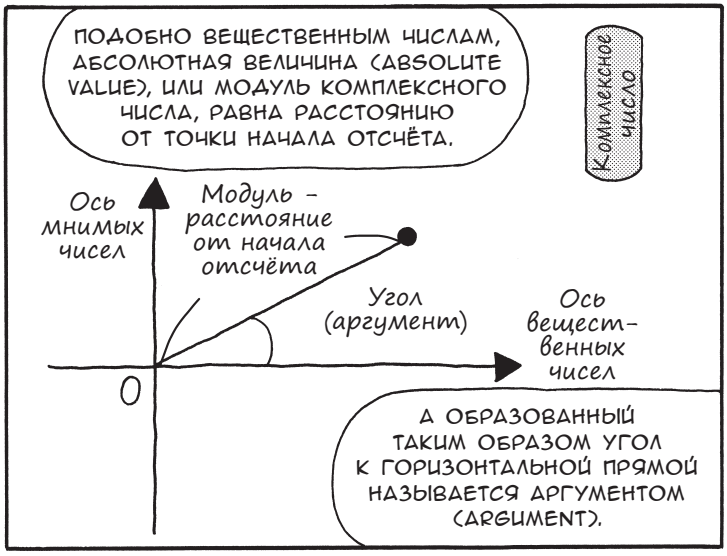




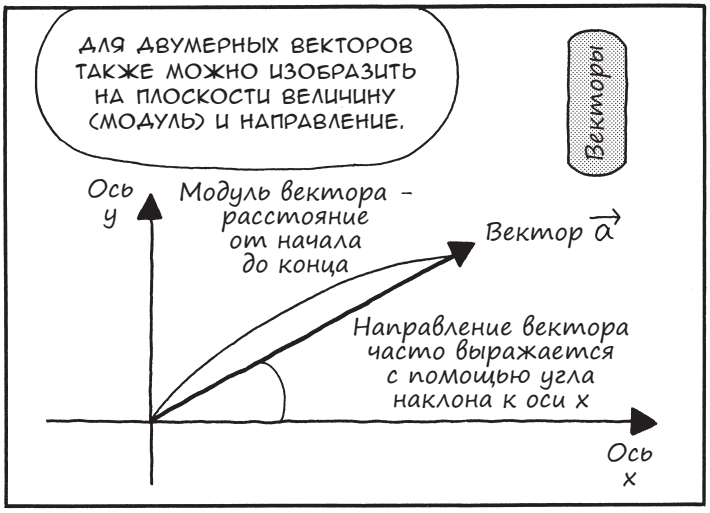



ЕСЛИ МНИМАЯ ЧАСТЬ РАВНА 0, ТО ЭТО БУДЕТ ТОЧКА НА ОСИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ, А ЕСЛИ РАВНА 0 ВЕЩЕСТВЕННАЯ ЧАСТЬ, ТО ПОЛУЧИМ ТОЧКУ НА ОСИ МНИМЫХ ЧИСЕЛ.
ТО ЕСТЬ ПОЛУЧАЕТСЯ, ЧТО ЛЮБОЕ КОМЛЕКСНОЕ ЧИСЛО МОЖНО ИЗОБРАЗИТЬ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ.
Похоже на карту, которая помогает не заблудиться.


А ВЕЛИЧИНА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА – ЭТО РАССТОЯНИЕ ОТ НЕГО ДО НАЧАЛА ОТСЧЁТА, ТАК?
3+2i
СОВЕРШЕННО ВЕРНО!


ПОДОБНО ВЕЩЕСТВЕННЫМ ЧИСЛАМ, АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА (ABSOLUTE VALUE), ИЛИ МОДУЛЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА, РАВНА РАССТОЯНИЮ ОТ ТОЧКИ НАЧАЛА ОТСЧЁТА.
Комплексное число
Ось мнимых чисел
Модуль – расстояние от начала отсчёта
Угол (аргумент)
Ось вещест-венных чисел
0
А ОБРАЗОВАННЫЙ ТАКИМ ОБРАЗОМ УГОЛ К ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ НАЗЫВАЕТСЯ АРГУМЕНТОМ (ARGUMENT).


ЭТО ПОХОЖЕ НА ВЕКТОРЫ.
ЗНАЧИТ, ВЕКТОРЫ ТЫ ХОРОШО ЗНАЕШЬ?


ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ВЕКТОРОВ ТАКЖЕ МОЖНО ИЗОБРАЗИТЬ НА ПЛОСКОСТИ ВЕЛИЧИНУ (МОДУЛЬ) И НАПРАВЛЕНИЕ.
Векторы
Ось y
Модуль вектора – расстояние от начала до конца
Вектор $\vec{a}$
Направление вектора часто выражается с помощью угла наклона к оси x
Ось x


ТОГДА, ДУМАЮ, ТЫ МОЖЕШЬ РАССЧИТАТЬ МОДУЛЬ И АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА.
ЕСЛИ ТЫ ЗНАЕШЬ ВЕКТОРЫ, ЭТО БУДЕТ ПРОСТО.


ВЕКТОРЫ Я ТОЖЕ ЗНАЮ ПЛОХО!
Как и мнимые числа!
Я ТАК И ПРЕДПОЛАГАЛА.


ДЛЯ НАЧАЛА РАССМОТРИМ НЕКОТОРЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.
Так и предполагала?..


Знак комплексного числа
$\dot{Z}$
ИНОГДА НАД КОМПЛЕКСНЫМ ЧИСЛОМ Z СТАВЯТ ТОЧКУ, ЧТОБЫ ОТЛИЧИТЬ ЕГО ОТ ВЕЩЕСТВЕННОГО


$\mathrm{Re}(z)$ или $\Re(z)$
– это вещественная часть комплексного числа Z.
ПО ПЕРВЫМ БУКВАМ ОТ REAL NUMBER.


$\mathrm{Im}(z)$ или $\Im(z)$
– это мнимая часть комплексного числа Z.
ПО ПЕРВЫМ БУКВАМ ОТ IMAGINARY NUMBER.


А ТЕПЕРЬ ПЕРЕЙДЁМ К ВЫВЕДЕНИЮ МОДУЛЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА И ЕГО АРГУМЕНТА.

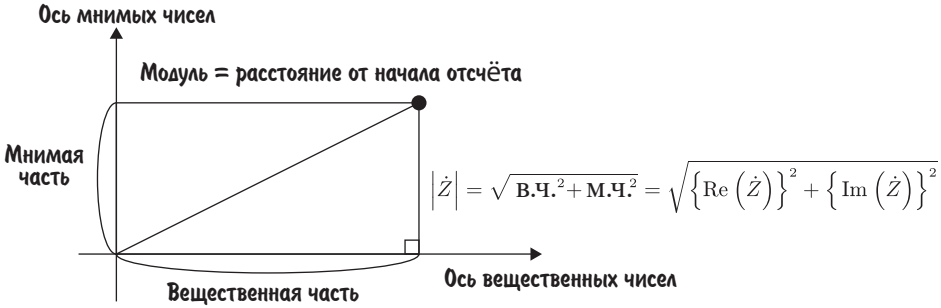
МОДУЛЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА



Модуль комплексного числа Z обозначается как |Z|

$$\left|\dot{Z}\right| = \sqrt{\text{в.ч.}^2 + \text{м.ч.}^2} = \sqrt{\left\{\text{Re}\left(\dot{Z}\right)\right\}^2 + \left\{\text{Im}\left(\dot{Z}\right)\right\}^2}$$

* в.ч. – вещественная часть, м.ч. – мнимая часть.





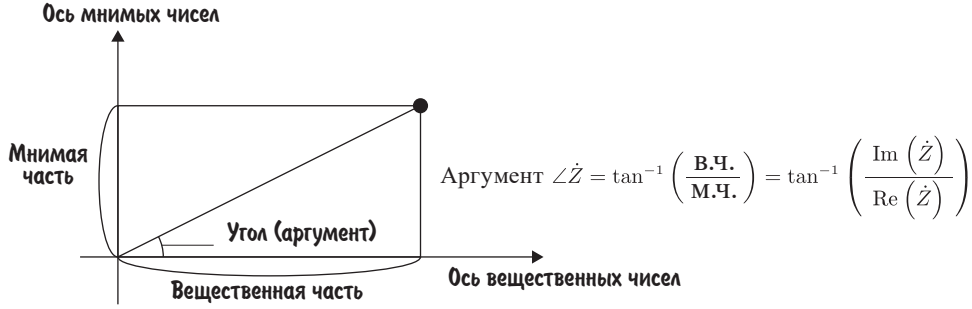
Модуль комплексного числа равен расстоянию до точки начала отсчёта, то есть длине гипотенузы прямоугольного треугольника на чертеже. Мы можем найти его по теореме Пифагора.

АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА



Аргумент комплексного числа Z обозначается как $\angle$ Z

$$\angle\dot{Z} = \tan^{-1}\left(\frac{\text{в.ч.}}{\text{м.ч.}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}\left(\dot{Z}\right)}{\text{Re}\left(\dot{Z}\right)}\right)$$

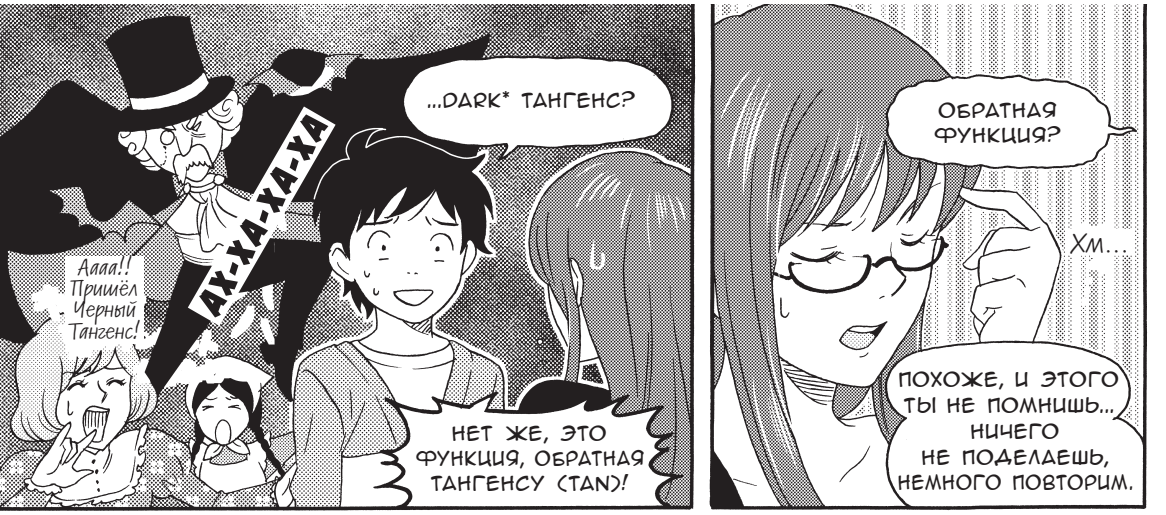




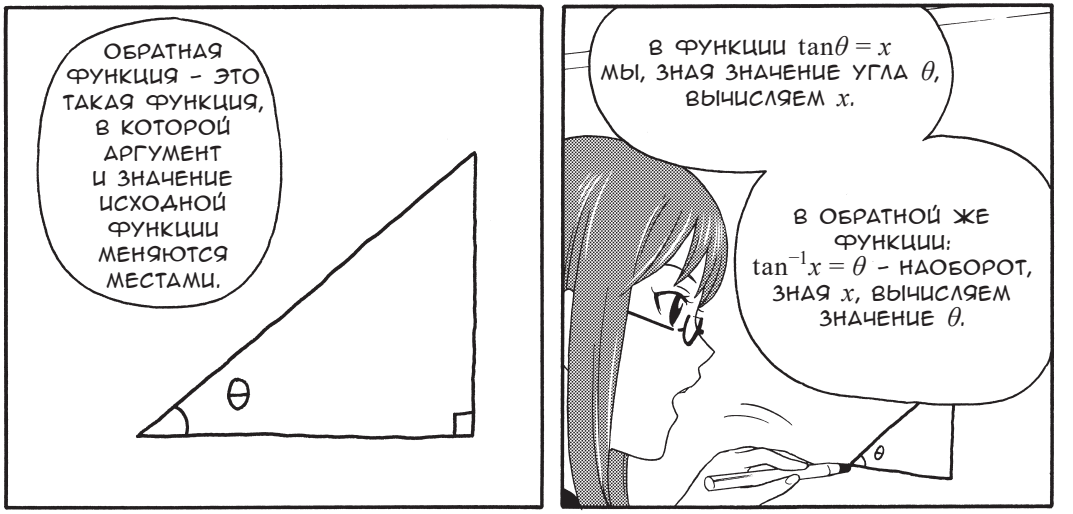
А почему тангенс tan возведён в степень −1?



$\tan^{-1}$ – это арктангенс.



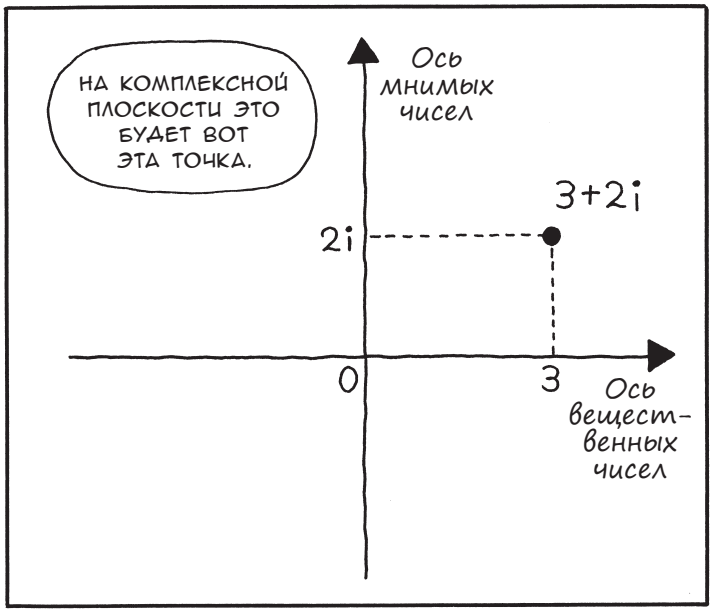
* Dark – тёмный, чёрный.

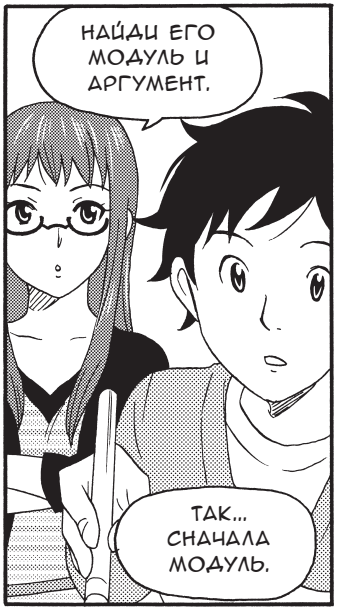


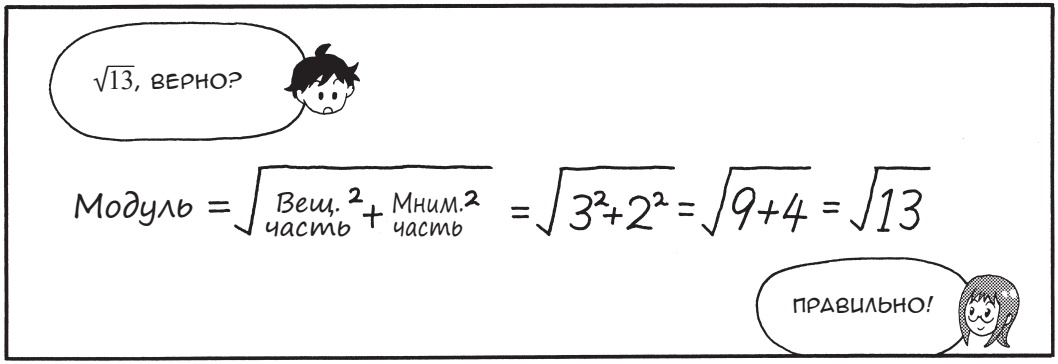


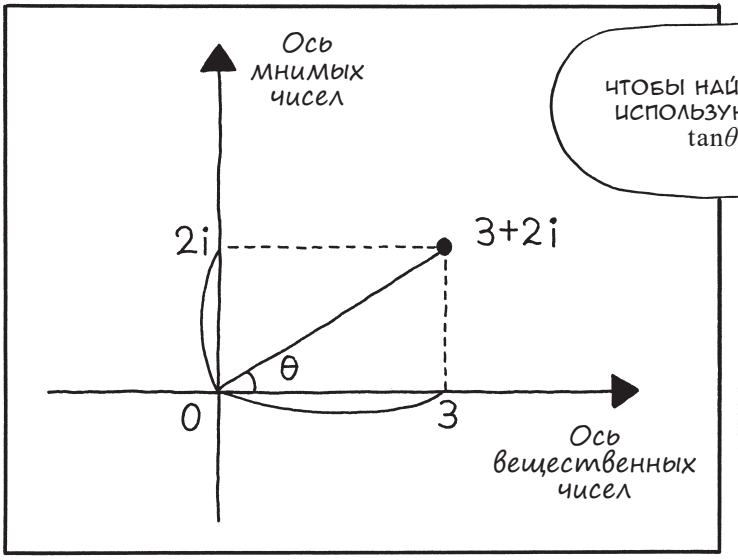

КСТАТИ, ХОТЯ НА ОБЫЧНОМ КАЛЬКУЛЯТОРЕ НЕЛЬЗЯ ПОСЧИТАТЬ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ TAN−1, ЭТО МОЖНО СДЕЛАТЬ С ПОМОЩЬЮ ИНЖЕНЕРНОГО КАЛЬКУЛЯТОРА, КОТОРЫЙ СОДЕРЖИТ ЭТУ ФУНКЦИЮ.
Я ТОЛЬКО ТАКИМ И ПОЛЬЗУЮСЬ.


ЧТО Ж, ПОПРОБУЕМ ПОСЧИТАТЬ.
КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО 3 + 2i...


НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ ЭТО БУДЕТ ВОТ ЭТА ТОЧКА.
Ось мнимых чисел
3+2i
2i
0
3
Ось вещест-венных чисел


НАЙДИ ЕГО МОДУЛЬ И АРГУМЕНТ.
ТАК... СНАЧАЛА МОДУЛЬ.


$\sqrt{13}$, ВЕРНО?
Модуль = $\sqrt{\text{Вещ. часть}^2 + \text{Мним. часть}^2} = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
ПРАВИЛЬНО!





$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

ОБРАТНОЙ ФУНКЦИЕЙ К ЭТОЙ ФУНКЦИИ БУДЕТ АРКТАНГЕНС...

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

Аргумент =

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\text{вещ.ч.}}{\text{мн.ч.}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33.69°$$

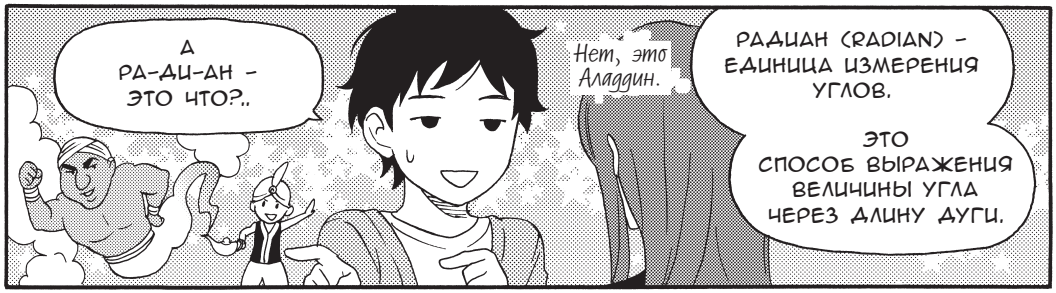
ИСПОЛЬЗУЯ ИНЖЕНЕРНЫЙ КАЛЬКУЛЯТОР, ПОЛУЧАЕМ 33.69 ГРАДУСА.

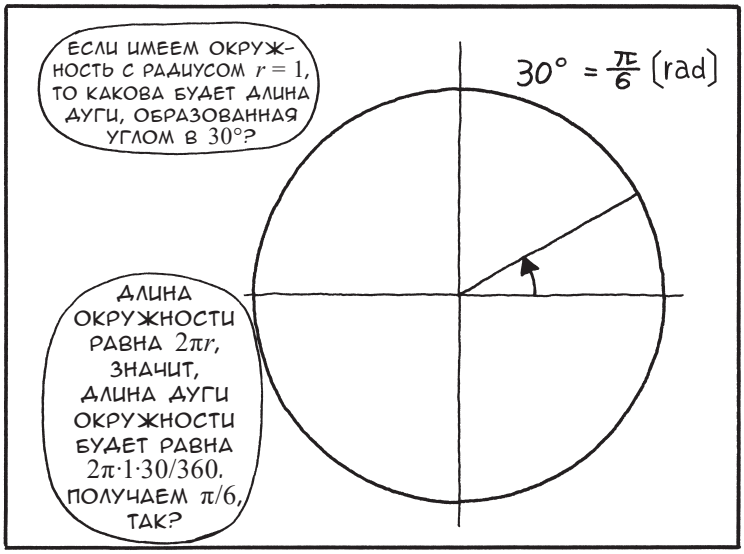


Аргумент =

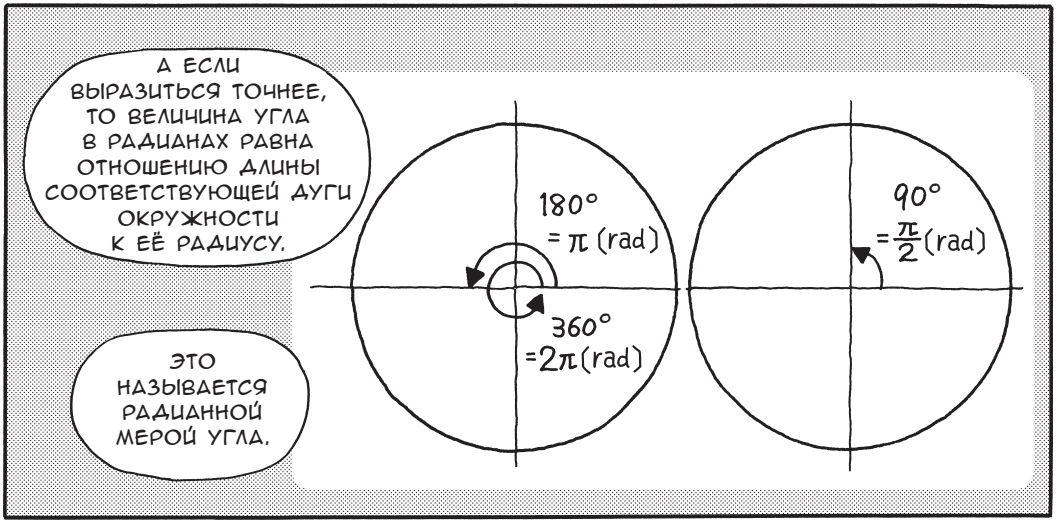
$$= \tan^{-1}\left(\frac{\text{вещ.ч.}}{\text{мн.ч.}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33.69 = 0.588 \text{ радиан}$$

А ЕСЛИ ВЫРАЗИТЬ В РАДИАНАХ, ТО ПОЛУЧИТСЯ ТАК.


А
РА-ДИ-АН –
ЭТО ЧТО?..
Нет, это Аладдин.
РАДИАН (RADIAN) – ЕДИНИЦА ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВ.
ЭТО СПОСОБ ВЫРАЖЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ УГЛА ЧЕРЕЗ ДЛИНУ ДУГИ.


ЕСЛИ ИМЕЕМ ОКРУЖНОСТЬ С РАДИУСОМ $r = 1$, ТО КАКОВА БУДЕТ ДЛИНА ДУГИ, ОБРАЗОВАННАЯ УГЛОМ В 30°?
$30° = \frac{\pi}{6}$ (rad)
ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ РАВНА $2\pi r$, ЗНАЧИТ, ДЛИНА ДУГИ ОКРУЖНОСТИ БУДЕТ РАВНА $2\pi \cdot 1 \cdot 30/360$. ПОЛУЧАЕМ $\pi/6$, ТАК?

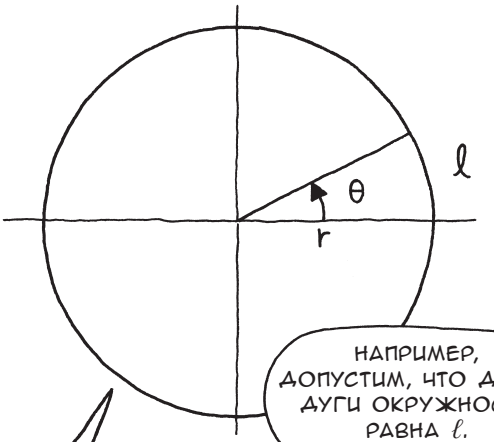

ВЕРНО, ТО ЕСТЬ УГОЛ В 30° РАВЕН $\pi/6$ РАДИАН.
радиан = rad
ТЕПЕРЬ, КОГДА БУДЕМ ВЫРАЖАТЬ УГОЛ В РАДИАНАХ, БУДЕМ ЗАПИСЫВАТЬ – RAD.


А ЕСЛИ ВЫРАЗИТЬСЯ ТОЧНЕЕ, ТО ВЕЛИЧИНА УГЛА В РАДИАНАХ РАВНА ОТНОШЕНИЮ ДЛИНЫ СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ДУГИ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ РАДИУСУ.
180° = π (rad)
360° = 2π (rad)
90° = $\frac{\pi}{2}$ (rad)
ЭТО НАЗЫВАЕТСЯ РАДИАННОЙ МЕРОЙ УГЛА.

А ЗАЧЕМ НУЖЕН ТАКОЙ СЛОЖНЫЙ СПОСОБ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВ?

Даже нарисовать окружность – и то не просто…

ПОТОМУ ЧТО РАДИАННАЯ МЕРА ОЧЕНЬ УДОБНА В РЯДЕ СЛУЧАЕВ.



НАПРИМЕР, ДОПУСТИМ, ЧТО ДЛИНА ДУГИ ОКРУЖНОСТИ РАВНА ℓ.

ПОДОБНО ТОМУ, КАК ТЫ СЧИТАЛ ДЛЯ СЛУЧАЯ С ОКРУЖНОСТЬЮ РАДИУСА 1, ПОЛУЧАЕМ:

Длина дуги окружности

$$\ell = \theta r$$

ТАК КАК π СОКРАЩАЕТСЯ, ТО ПОЛУЧАЕТСЯ ВОТ ТАКАЯ ПРОСТАЯ ФОРМУЛА.

ЗДОРОВО, ДА? АНАЛОГИЧНО ДЛЯ ПЛОЩАДИ. ПЛОЩАДЬ КРУГА – πr^2.

$360°$ – ЭТО И ЕСТЬ 2π, А ПЛОЩАДЬ ПОЛОВИНЫ КРУГА РАВНА $1/2 \cdot \pi r^2$, ПОЭТОМУ…

…ВОТ ЧТО ПОЛУЧИМ:

Площадь сегмента

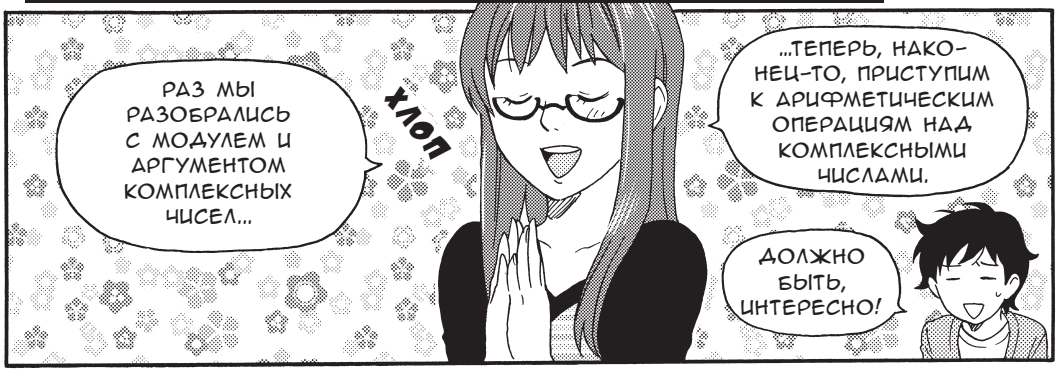
$$\frac{\theta}{2\pi}\pi r^2 = \frac{1}{2}\theta r^2 = \frac{1}{2}\ell r$$

ОЧЕНЬ ПРОСТО, ПРАВДА?

КРОМЕ ТОГО, РАДИАННАЯ МЕРА ОЧЕНЬ ПОЛЕЗНА ПРИ РАБОТЕ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ. ПОЭТОМУ, ПОЖАЛУЙСТА, ХОРОШЕНЬКО РАЗБЕРИСЬ В ЭТОЙ ТЕМЕ.

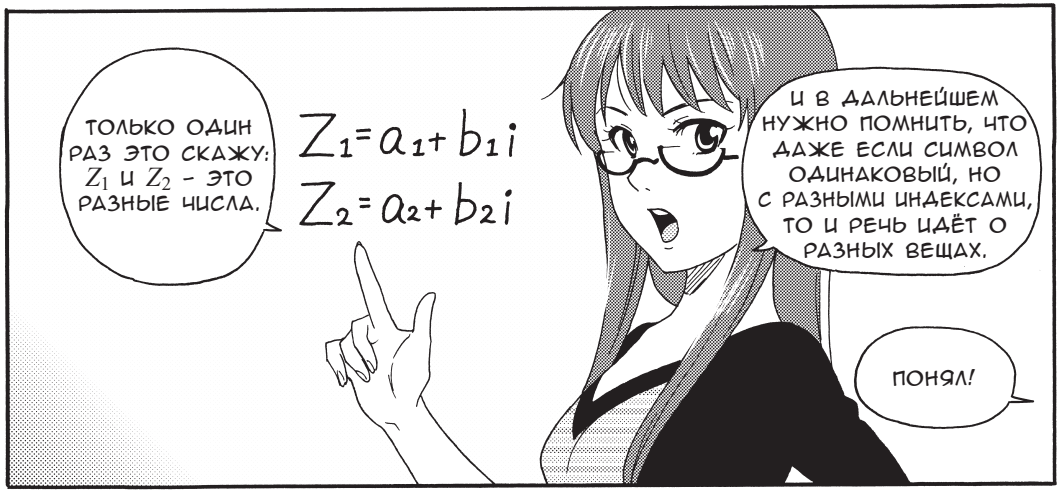
Хорошо.

3. ОСНОВНЫЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ











Итак, быстренько пройдёмся по арифметическим операциям.
При сложении комплексных чисел работает правило перестановки $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$:

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + a_2 + b_1 i + b_2 i = \\ = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\, i$$



А при вычитании правило перестановки не работает.
То есть $Z_1 - Z_2 \neq Z_2 - Z_1$:

$$Z_1 - Z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = a_1 - a_2 + b_1 i - b_2 i = \\ = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)\, i$$



При умножении используем правило раскрытия скобок
и затем в процессе преобразования пользуемся тем, что $i^2 = -1$:

$$Z_1 \times Z_2 = \ (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 i b_2 i \\ = a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i \ = \ a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\, i$$



Осуществить деление сложнее, но если в процессе домножить
и числитель, и знаменатель полученной дроби на одинаковое число,
а затем в знаменателе избавиться от мнимых чисел,
то всё получается просто как при умножении:

$$\frac{Z_1}{Z_2} \ = \ \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \times \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i}$$

$$= \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + b_1 a_2 i - b_1 b_2 i^2}{a_2^2 - a_2 b_2 i + b_2 a_2 i - b_2^2 i^2}$$

$$= \ \frac{a_1 a_2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2)\, i + b_1 b_2}{a_2^2 + (-a_2 b_2 + a_2 b_2)\, i + b_2^2}$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2)\, i}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \ \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$



А откуда взялось это выражение $a^2 - b^2 i$, на которое мы умножили числитель и знаменатель?



Это комплексное число, содержащее такое же мнимое число, как в знаменателе, но с противоположным знаком (если был +, то меняем на −, и наоборот). Оно позволяет нам сократить мнимые числа в знаменателе.



Так, а теперь пример: $Z_1 = 1 + 2i$, $Z_2 = 3 + 4i$.
Попробуй проделать основные арифметические операции.



Ладно!

Сложение: $Z_1 + Z_2 = (1 + 2i) + (3 + 4i) = 1 + 3 + 2i + 4i = 4 + 6i$

Вычитание: $Z_1 - Z_2 = (1 + 2i) - (3 + 4i) = 1 - 3 + 2i - 4i = -2 - 2i$

Умножение: $Z_1 \times Z_2 = (1 + 2i) \times (3 + 4i) = 1 \times 3 + 1 \times 4i + 2i \times 3 + 2i \times 4i =$
$= 3 - 8 + (4 + 6)\, i = -5 + 10i$

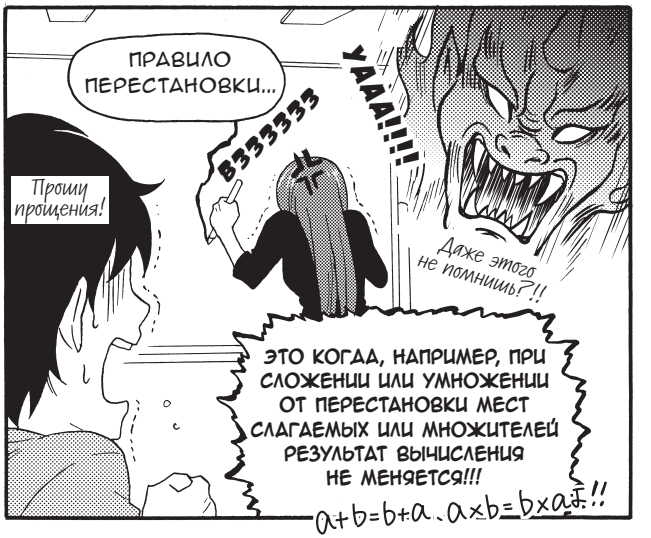
Деление:

$$\begin{aligned}
\frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{1 + 2i}{3 + 4i} = \frac{1 + 2i}{3 + 4i} \times \frac{3 - 4i}{3 - 4i} \\
&= \frac{1 \times 3 - 1 \times 4i + 2i \times 3 - 2i \times 4i}{3^2 - 3 \times 4i + 4i \times 3 + 4^2 i^2} \\
&= \frac{3 + (6 - 4)\, i - 8i^2}{9 + (-12 + 12)\, i + 16} \\
&= \frac{3 + 8 + 2i}{9 + 16} \\
&= \frac{11}{25} + \frac{2}{25} i
\end{aligned}$$



Ч. ИЗОБРАЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ













Сложение: $Z_1 + Z_2 = (1 + 2i) + (3 + 4i) = 1 + 3 + 2i + 4i = 4 + 6i$



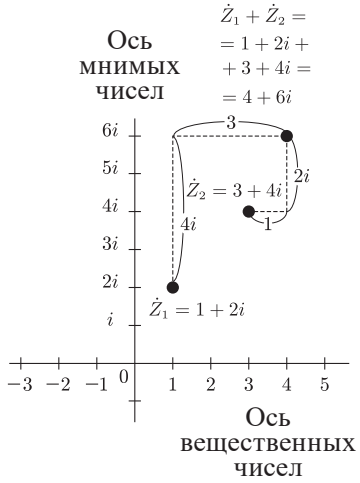
Когда прибавляем к комплексному числу 1 + 2*i* комплексное число 3 + 4*i*, то от точки, обозначающей число 1 + 2*i* на комплексной плоскости, перемещаемся на 3 позиции вправо по оси вещественных чисел и на 4 позиции вверх по оси мнимых чисел. Таким образом получаем в результате число 4 + 6*i*.



А теперь рассмотрим $Z_2 + Z_1$, то есть к числу 3 + 4*i* прибавим число 1 + 2*i*. Отправной точкой на комплексной плоскости теперь будет точка, обозначающая число 3 + 4*i*. От неё по оси вещественных чисел перемещаемся на 1 позицию вправо, а по оси мнимых чисел на 2 позиции вверх и в результате прибываем в ту же самую точку: 4 + 6*i*. Что и демонстрирует правило перестановки.



На чертеже всё гораздо понятнее!



Вычитание: $Z_1 - Z_2 = (1 + 2i) - (3 + 4i) = 1 - 3 + 2i - 4i = -2 - 2i$



Дальше рассмотрим вычитание. От комплексного числа 1 + 2*i* отнимем комплексное число 3 + 4*i*. То есть от точки 1 + 2*i* на комплексной плоскости переместимся на 3 позиции влево по оси вещественных чисел и на 4 позиции вниз по оси мнимых чисел. Таким образом, окажемся в точке −2 − 2*i*.



А теперь посмотрим, что получится, если мы к комплексному числу −3 − 4*i* прибавим комплексное число 1 + 2*i*. То есть от точки −3 − 4*i* перемещаемся на 1 позицию вправо по оси вещественных чисел и на 2 позиции вверх по оси мнимых чисел. И в результате опять же оказываемся в точке −2 − 2*i*.

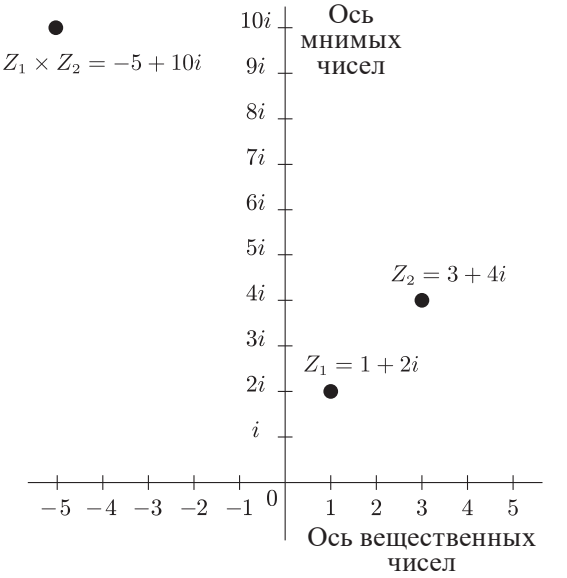


Умножение:

$$Z_1 \times Z_2 = (1+2i)\times(3+4i) = 1\times3+1\times4i+2i\times3+2i\times4i = 3-8+(4+6)\,i = -5+10i$$



Умножение нельзя отобразить графически с помощью простого перемещения по осям вправо-влево, вверх-вниз, подобно тому, как мы делали при сложении и вычитании. Так, при перемножении комплексных чисел 1 + 2*i* и 3 + 4*i* ответом будет число −5 + 10*i*, то есть на комплексной плоскости это будет точка с координатами −5 по оси вещественных чисел и 10*i* по оси мнимых чисел.





Это из-за того, что $i^2 = -1$, да? Ого, куда переместилась!

Деление:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1+2i}{3+4i} = \frac{1+2i}{3+4i}\times\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{1\times3-1\times4i+2i\times3-2i\times4i}{3^2-3\times4i+4i\times3+4^2i^2}$$

$$= \frac{3+(6-4)\,i-8i^2}{9+(-12+12)\,i+16} = \frac{3+8+2i}{9+16}$$

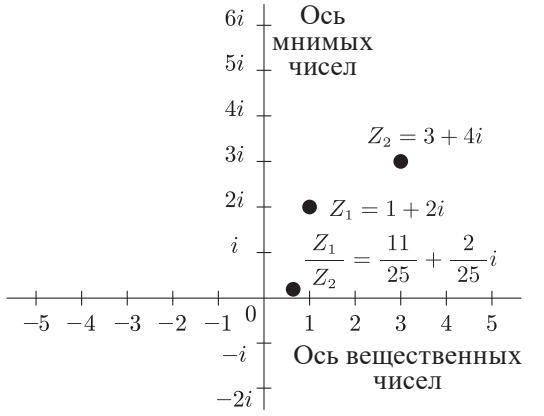
$$= \frac{11}{25}+\frac{2}{25}i$$

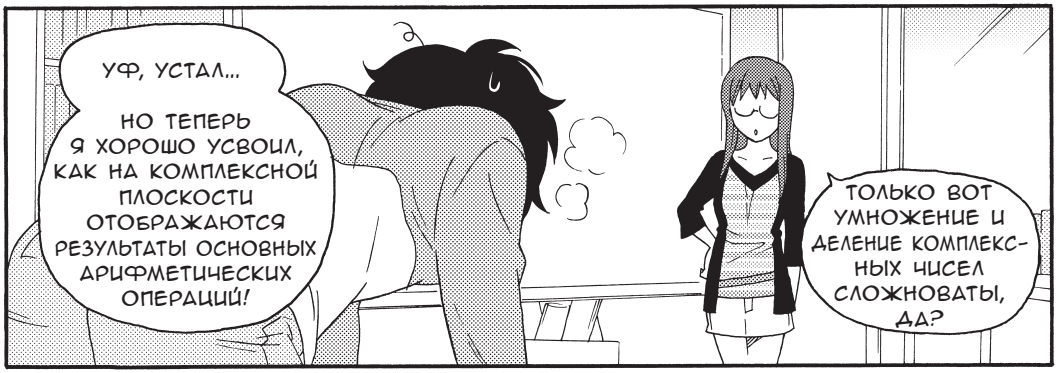


При делении похожая ситуация. Результат деления

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{11}{25}+\frac{2}{25}i,$$

поэтому на комплексной плоскости получаем точку с координатами 11/25 по оси вещественных чисел и 2/25*i* по оси мнимых чисел.









5. СОПРЯЖЁННЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА



$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} = \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} \times \frac{a_2-b_2i}{a_2-b_2i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2+(b_1a_2-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

АГА, МЫ ИСПОЛЬЗОВАЛИ ТАКОЕ ЖЕ КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО, КАК В ЗНАМЕНАТЕЛЕ, ТОЛЬКО С ПРОТИВОПОЛОЖНЫМ ЗНАКОМ ПЕРЕД МНИМОЙ ЧАСТЬЮ (ЕСЛИ БЫЛ +, ТО СТАВИМ –, И НАОБОРОТ). ТАКИЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ОТЛИЧАЮЩИЕСЯ ТОЛЬКО ЗНАКОМ ПЕРЕД МНИМОЙ ЧАСТЬЮ, НАЗЫВАЮТСЯ СОПРЯЖЁННЫМИ.

$Z=3+4i \quad Z^*=3-4i$

Сопряжённое комплексное число

СОПРЯЖЁННОЕ ЧИСЛО ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА Z ОБОЗНАЧАЕТСЯ КАК Z^*.





$Z=3+4i \quad Z^*=3-4i$

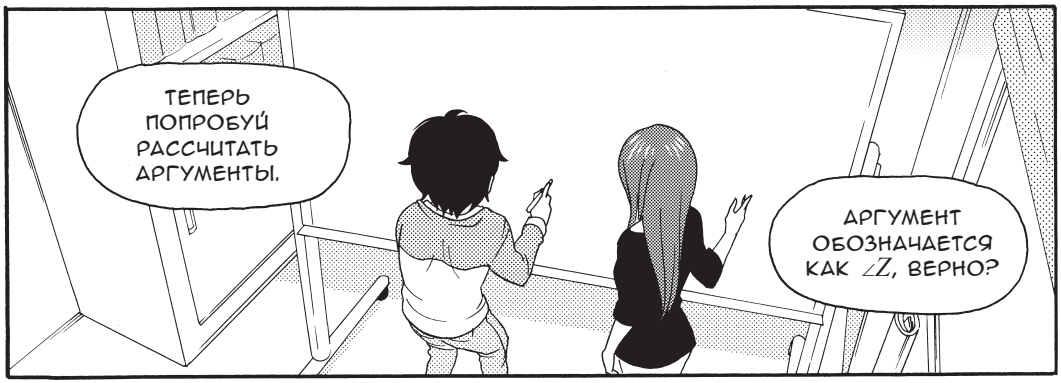
Сопряжённое комплексное число

$$|Z|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$



$$|Z^*|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

КАК ВИДИШЬ, РЕЗУЛЬТАТ ПОЛУЧАЕТСЯ ОДИНАКОВЫМ.



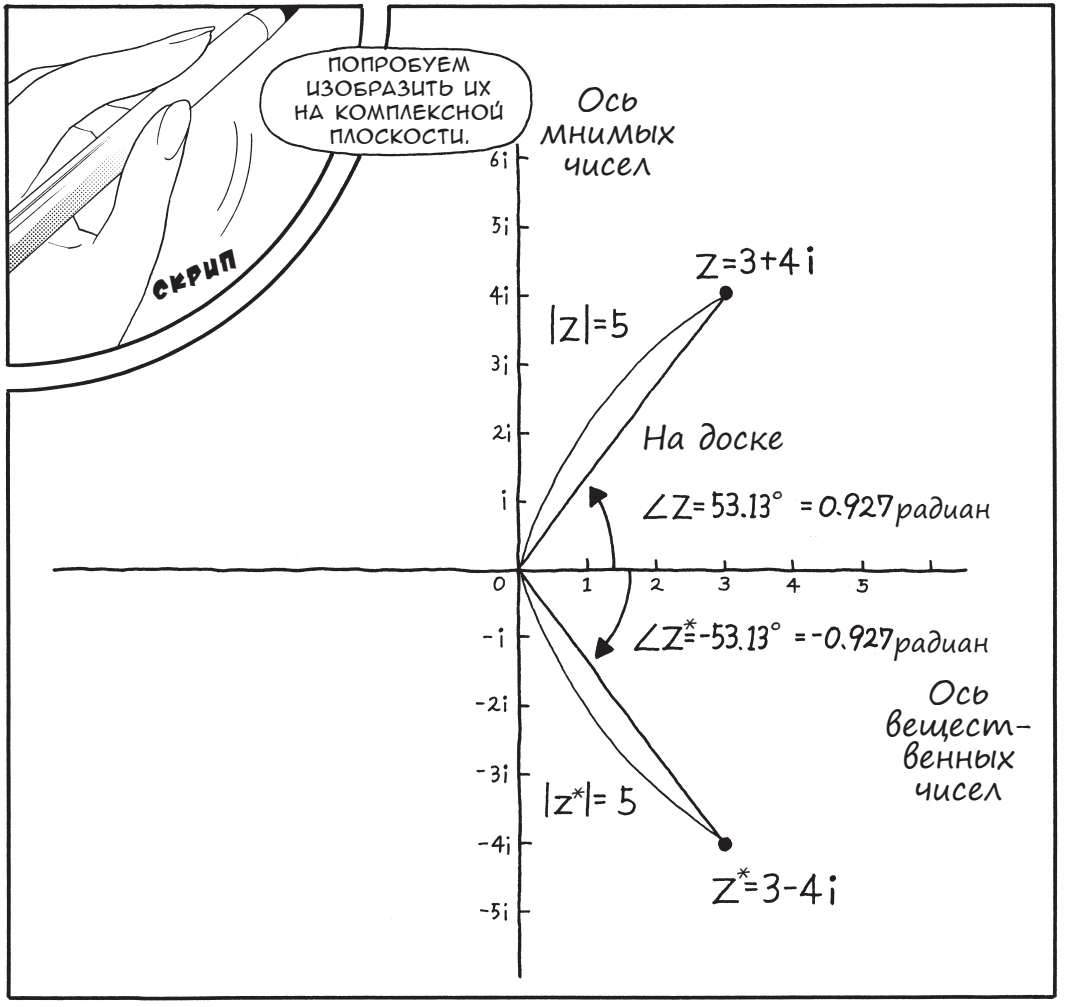
$$\angle Z = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13^\circ = 0.927[\text{rad}]$$

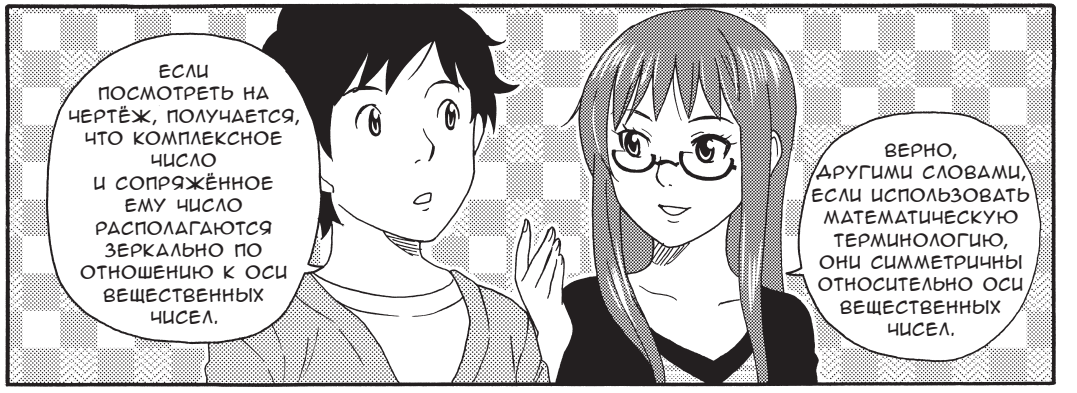
$$\angle Z^* = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right) = -53.13^\circ = -0.927[\text{rad}]$$







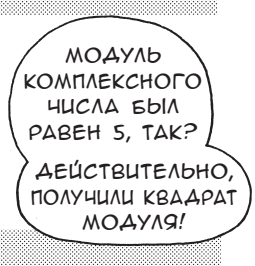

ПОПРОБУЕМ ИЗОБРАЗИТЬ ИХ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ.
СКРИП
Ось мнимых чисел
6i
5i
4i
3i
2i
i
0
1
2
3
4
5
-i
-2i
-3i
-4i
-5i
Z=3+4i
|Z|=5
На доске
∠Z=53.13° =0.927радиан
∠Z*=-53.13° =-0.927радиан
Ось вещест-венных чисел
|z*|= 5
Z*=3-4i

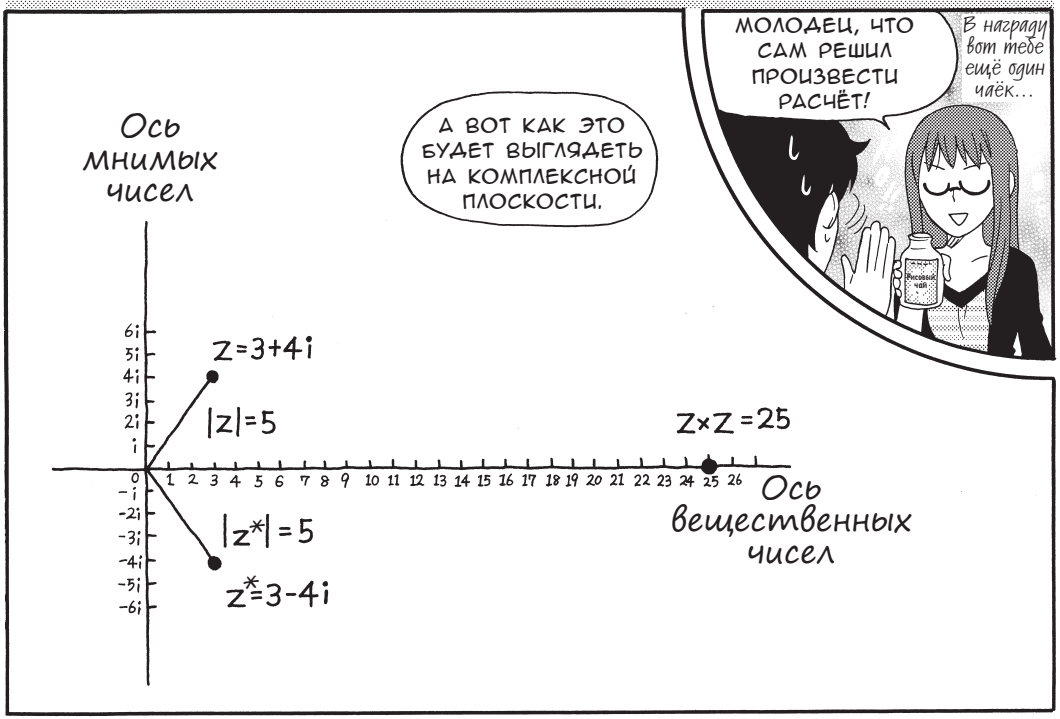

ЕСЛИ ПОСМОТРЕТЬ НА ЧЕРТЁЖ, ПОЛУЧАЕТСЯ, ЧТО КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО И СОПРЯЖЁННОЕ ЕМУ ЧИСЛО РАСПОЛАГАЮТСЯ ЗЕРКАЛЬНО ПО ОТНОШЕНИЮ К ОСИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ.
ВЕРНО, ДРУГИМИ СЛОВАМИ, ЕСЛИ ИСПОЛЬЗОВАТЬ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ТЕРМИНОЛОГИЮ, ОНИ СИММЕТРИЧНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ.





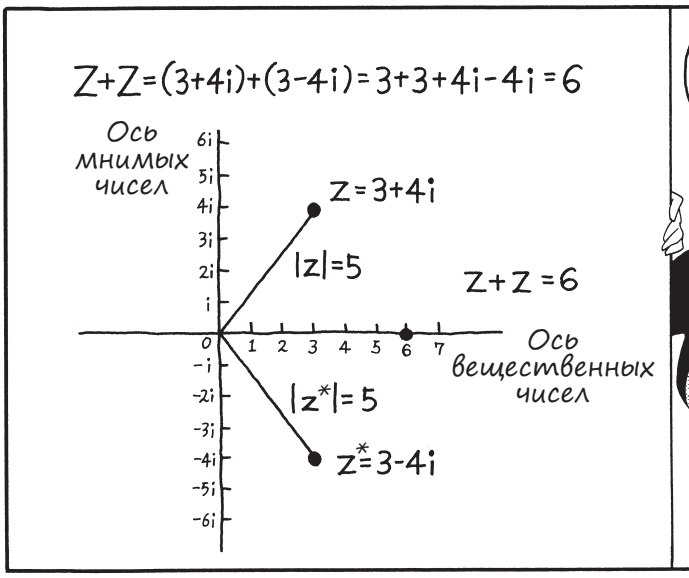
$$Z \times Z^{*} = (3+4i) \times (3-4i) = 3^2 - 3 \times 4i + 4i \times 3 - 4i \times 4i = 9 - 16i^2 = 9 + 16 = 25$$





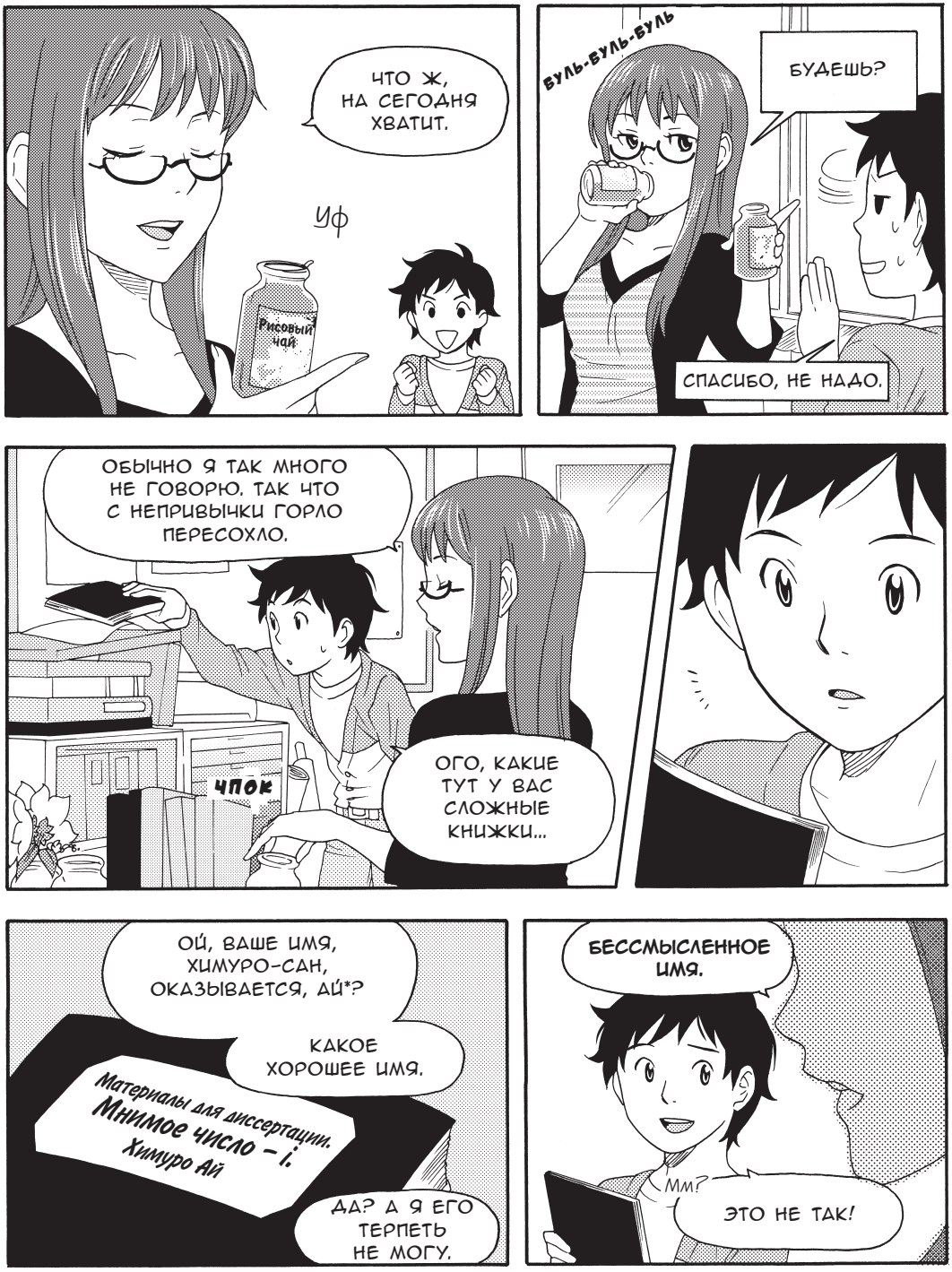

ЭТОТ ПРИЁМ, ЧТО МЫ ИСПОЛЬЗОВАЛИ ПРИ ДЕЛЕНИИ: ДОМНОЖЕНИЕ НА СОПРЯЖЁННОЕ ЧИСЛО, ЧТОБЫ ПОЛУЧИТЬ В ЗНАМЕНАТЕЛЕ ВЕЩЕСТВЕННОЕ ЧИСЛО, – НАЗЫВАЕТСЯ РАЦИОНАЛИЗАЦИЕЙ.
Знаменатель · Сопряжённое комплексное число = Вещественное число
Рационализация знаменателя


ЭТО ЖЕ ОТ СЛОВА "РАЦИОН"? Я ТУТ КАК РАЗ СМОТРЕЛ ПРОГРАММУ ПРО РАЦИОН КОАЛ.
НЕТ ЖЕ! ЭТО ОТ СЛОВА "РАЦИОНАЛЬНОСТЬ"!
ЕЩЁ РАЗ СКАЖЕШЬ ПОДОБНУЮ ГЛУПОСТЬ, И Я СИЛЬНО РАССЕРЖУСЬ!
ПОНЯЛ...

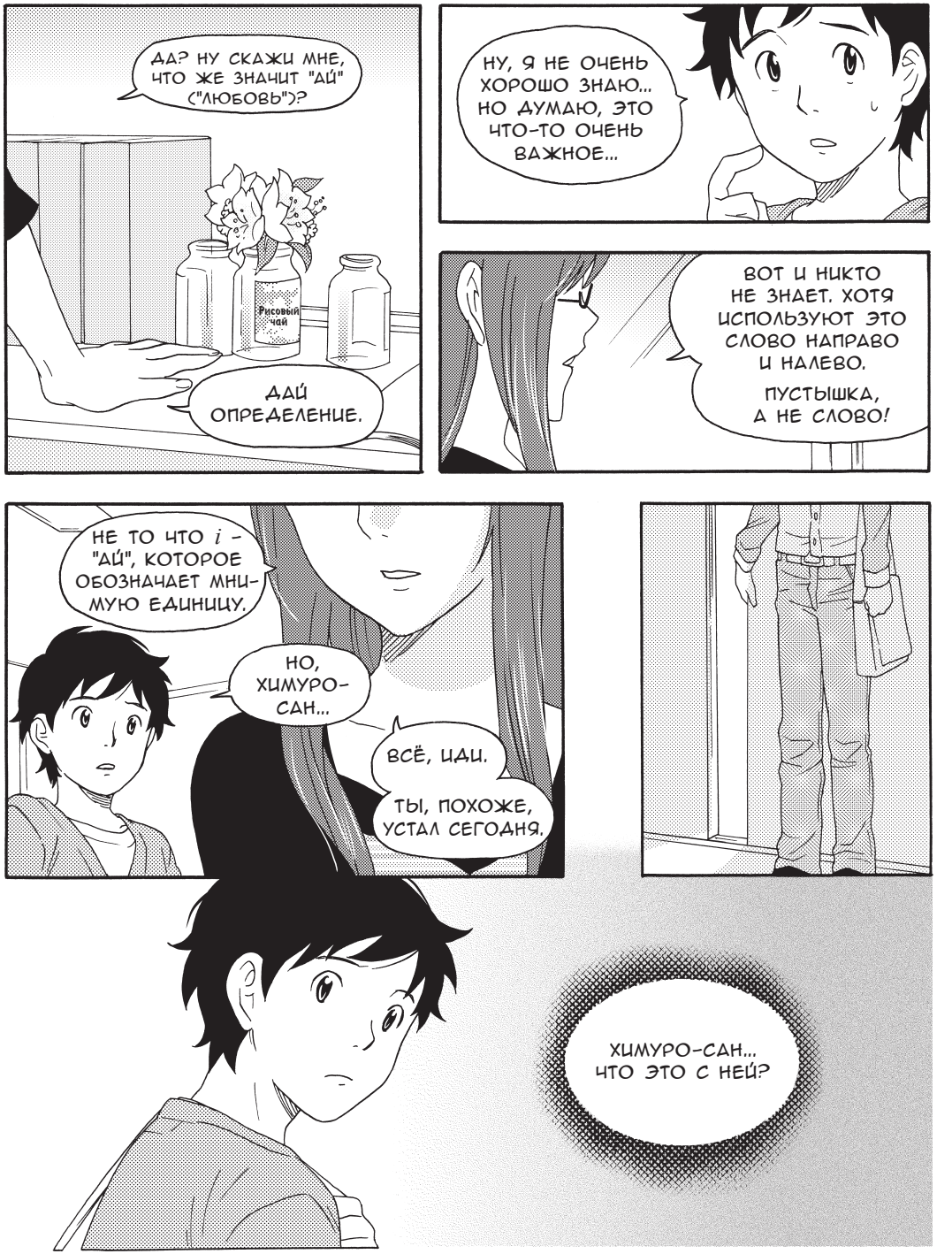

Z+Z=(3+4i)+(3−4i)=3+3+4i−4i=6
Ось мнимых чисел
Ось вещественных чисел
Z=3+4i
|z|=5
Z+Z=6
|z*|=5
Z*=3−4i


И ЕСЛИ СЛОЖИТЬ СОПРЯЖЁННЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ТО В РЕЗУЛЬТАТЕ ТОЖЕ ПОЛУЧИМ ВЕЩЕСТВЕННОЕ ЧИСЛО.
ТАК КАК МНИМЫЕ ЧАСТИ СОПРЯЖЁННЫХ ЧИСЕЛ РАЗЛИЧАЮТСЯ ТОЛЬКО ЗНАКОМ, ТО ЭТО ВПОЛНЕ ЕСТЕСТВЕННО, ДА?


СОПРЯЖЁННЫЕ ЧИСЛА НАМ ЕЩЁ НЕ РАЗ ПРИГОДЯТСЯ ПРИ РАБОТЕ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ТАК ЧТО ПОСТАРАЙСЯ КАК СЛЕДУЕТ С НИМИ РАЗОБРАТЬСЯ.
ОБЯЗАТЕЛЬНО!



* Ай – в японском языке иероглиф 愛 («ай») в имени Химуро имеет значение «любовь».


ДА? НУ СКАЖИ МНЕ, ЧТО ЖЕ ЗНАЧИТ "ДАЙ" ("ЛЮБОВЬ")?
Рисовый чай
ДАЙ ОПРЕДЕЛЕНИЕ.
НУ, Я НЕ ОЧЕНЬ ХОРОШО ЗНАЮ... НО ДУМАЮ, ЭТО ЧТО-ТО ОЧЕНЬ ВАЖНОЕ...
ВОТ И НИКТО НЕ ЗНАЕТ. ХОТЯ ИСПОЛЬЗУЮТ ЭТО СЛОВО НАПРАВО И НАЛЕВО.
ПУСТЫШКА, А НЕ СЛОВО!
НЕ ТО ЧТО i – "АЙ", КОТОРОЕ ОБОЗНАЧАЕТ МНИМУЮ ЕДИНИЦУ.
НО, ХИМУРО-САН...
ВСЁ, ИДИ.
ТЫ, ПОХОЖЕ, УСТАЛ СЕГОДНЯ.
ХИМУРО-САН... ЧТО ЭТО С НЕЙ?

6. УПРАЖНЕНИЯ

Упростите эти выражения, содержащие комплексные числа

❶ $(3+2i)+(4-3i)$

❷ $(7+5i)-(4-2i)$

❸ $(6-2i)(1+4i)$

❹ $(\sqrt{3}+i)(2+\sqrt{3}i)$

❺ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}i\right)(4+4i)$

❻ $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$

❼ $-3i(3+2i)(4-3i)$

Решение

❶ $(3+2i)+(4-3i)$

$= 3+4+(2-3)i = 7-i$

❷ $(7+5i)-(4-2i)$

$= 7-4+(5+2)i = 3+7i$

❸ $(6-2i)(1+4i)$

$= 6\times 1+6\times 4i-2i\times 1-2i\times 4i$

$= 6+24i-2i-8i^2$

$= 6-8\times(-1)+(24-2)i$

$= 6+8+22i = 14+22i$

❹ $(\sqrt{3}+i)(2+\sqrt{3}i)$

$= \sqrt{3}\times 2+\sqrt{3}\times\sqrt{3}i+2i+\sqrt{3}i^2$

$= 2\sqrt{3}+\sqrt{3}\times(-1)+(3+2)i$

$= 2\sqrt{3}-\sqrt{3}+5i = \sqrt{3}+5i$

❺ $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}i\right)(4+4i)$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 4+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 4i-\sqrt{2}i\times 4-\sqrt{2}i\times 4i$

$= 2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i-4\sqrt{2}i-4\sqrt{2}i^2$

$= 2\sqrt{3}-4\sqrt{2}\times(-1)+(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})i$

$= 2\sqrt{3}+4\sqrt{2}+(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})i \quad =2(\sqrt{3}+2\sqrt{2})+2(\sqrt{3}-2\sqrt{2})i$

❻ $\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$

$= -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\sqrt{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\sqrt{2}i-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\times\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\times\sqrt{2}i$

$= -\dfrac{2\sqrt{6}}{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times(-1)+\left(\dfrac{2\times 2}{3}-\dfrac{3}{2}\right)i$

$= -\dfrac{2\sqrt{6}}{3}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{3}{2}\right)i$

$= \dfrac{-2\sqrt{6}\times 2-\sqrt{6}\times 3}{6}+\left(\dfrac{4\times 2-3\times 3}{6}\right)i$

$= \dfrac{-4\sqrt{6}-3\sqrt{6}}{6}+\left(\dfrac{8-9}{6}\right)i$

$= -\dfrac{7\sqrt{6}}{6}-\dfrac{1}{6}i$

$= \dfrac{-7\sqrt{6}-i}{6}$

$= -\dfrac{7\sqrt{6}+i}{6}$

❼ $-3i\,(3+2i)\,(4-3i)$

$= -3i\,(3\times 4-3\times 3i+2i\times 4-2i\times 3i)$

$= -3i\,(12-6\times(-1)-9i+8i)$

$= -3i\,(12+6-i)$

$= -3i\,(18-i)$

$= -3i\times 18+3i\times i$

$= -54i+3\times(-1)$

$= -3-54i$

Упражнения с сопряжёнными числами

Даны $Z = 4\ \ 7i$ и $Z^* = 4 + 7i$ – сопряжённые комплексные числа. Произведите с этими числами следующие вычисления:

❶ $Z^* + 2$ ❷ $Z + Z^*$ ❸ $3Z + 2Z^*$

❹ $-Z - 5Z^*$ ❺ $Z^* \cdot Z$ ❻ $\dfrac{Z^*}{Z}$

Решение

❶ $$\begin{aligned} Z^* + 2 &= 4\ + 7i + 2 \\ &= 6\ + 7i \end{aligned}$$

❷ $$\begin{aligned} \dot{Z} + Z^* &= 4 - 7i + 4 + 7i \\ &= 8 \end{aligned}$$

❸ $$\begin{aligned} 3Z + 2Z^* &= 3 \times (4 - 7i) + 2 \times (4 + 7i) \\ &= 12 - 21i + 8 + 14i \\ &= 12 + 8 + (14 - 21)\, i \\ &= 20 - 7i \end{aligned}$$

❹ $$\begin{aligned} -Z - 5Z^* &= -1 \times (4 - 7i) - 5 \times (4 + 7i) \\ &= -4 + 7i - 20 - 35i \\ &= -4 - 20 + (7 - 35)\, i \\ &= -24 - 28i \end{aligned}$$

❺ $$\begin{aligned} Z^* \cdot Z &= (4 + 7i)\,(4 - 7i) \\ &= 4 \times 4 - 4 \times 7i + 7i \times 4 - 49 \times i^2 \\ &= 16 - 28i + 28i - 49 \times (-1) \\ &= 16 + 49 \\ &= 65 \end{aligned}$$

❻ $$\begin{aligned}\frac{Z^*}{Z} &= \frac{4+7i}{4-7i} = \frac{4+7i}{4-7i}\times\frac{4+7i}{4+7i}\\ &= \frac{4\times4+4\times7i+7i\times4+7i\times7i}{4\times4+4\times7i-7i\times4-49\times i^2}\\ &= \frac{16+28i+28i+49\times(-1)}{16+28i-28i-49\times(-1)}\\ &= \frac{16-49+56i}{16+49}\\ &= \frac{-33+56i}{65}\\ &= -\frac{33}{65}+\frac{56}{65}i\end{aligned}$$

Сделайте рационализацию следующих дробей, содержащих комплексные числа, и упростите полученные выражения.

❶ $\dfrac{3}{1+i}$

❷ $\dfrac{2+3i}{4i}$

❸ $\dfrac{2-2i}{2+5i}$

❹ $\dfrac{3-2i}{2+3i}$

Решение

❶ $$\begin{aligned}\frac{3}{1+i} &= \frac{3}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\\ &= \frac{3-3i}{1-i+i-i^2}\\ &= \frac{3-3i}{1-(-1)} = \frac{3-3i}{2}\\ &= \frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\end{aligned}$$

❷
$$\begin{aligned}
\frac{2+3i}{4i} &= \frac{2+3i}{4i} \times \frac{-4i}{-4i} \\
&= \frac{2\times(-4i)+3i\times(-4i)}{-16i^2} \\
&= \frac{-8i-12i^2}{-16\times(-1)} \\
&= \frac{-8i-12\times(-1)}{16} \\
&= \frac{12-8i}{16} \\
&= \frac{3-2i}{4} \\
&= \frac{3}{4}-\frac{2i}{4} \\
&= \frac{3}{4}-\frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

❸
$$\begin{aligned}
\frac{2-2i}{2+5i} &= \frac{2-2i}{2+5i} \times \frac{2-5i}{2-5i} \\
&= \frac{2\times 2-2\times 5i-2i\times 2+2i\times 5i}{2\times 2-2\times 5i+5i\times 2-5i\times 5i} \\
&= \frac{4-10i-4i+10i^2}{4-10i+10i-25i^2} \\
&= \frac{4+10\times(-1)-14i}{4-25\times(-1)} \\
&= \frac{4-10-14i}{4+25} \\
&= \frac{-6-14i}{29} \\
&= -\frac{6}{29}-\frac{14}{29}i
\end{aligned}$$

❹
$$\begin{aligned}
\frac{3-2i}{2+3i} &= \frac{3-2i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i} \\
&= \frac{3\times 2 - 3\times 3i - 2i\times 2 + 2i\times 3i}{2\times 2 - 2\times 3i + 3i\times 2 - 3i\times 3i} \\
&= \frac{6-9i-4i+6i^2}{4-6i+6i-9i^2} \\
&= \frac{6+6\times(-1)+(-9-4)\,i}{4-9\times(-1)} \\
&= \frac{6-6-13i}{4+9} \\
&= \frac{-13i}{13} \\
&= -i
\end{aligned}$$

Глава

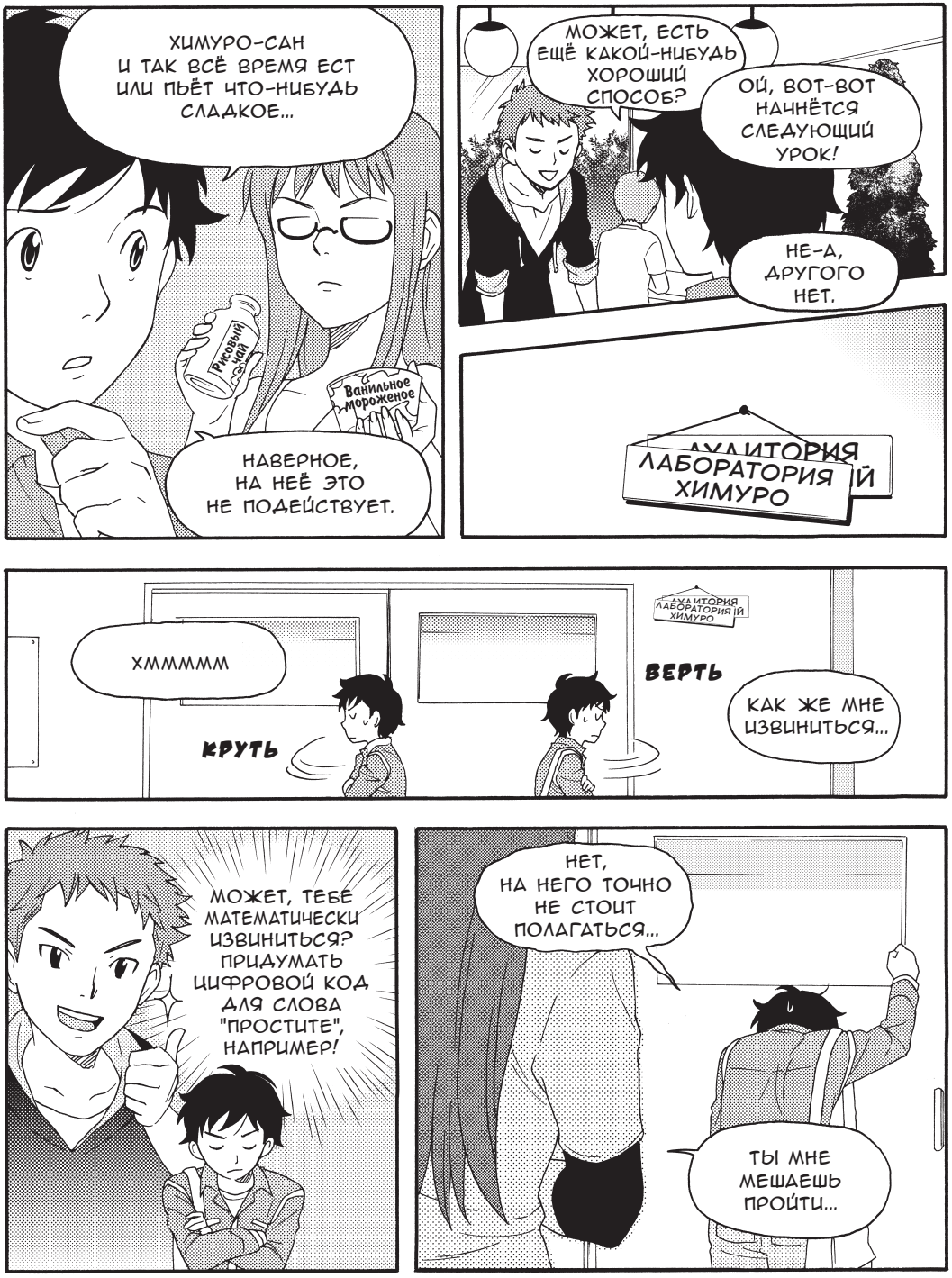


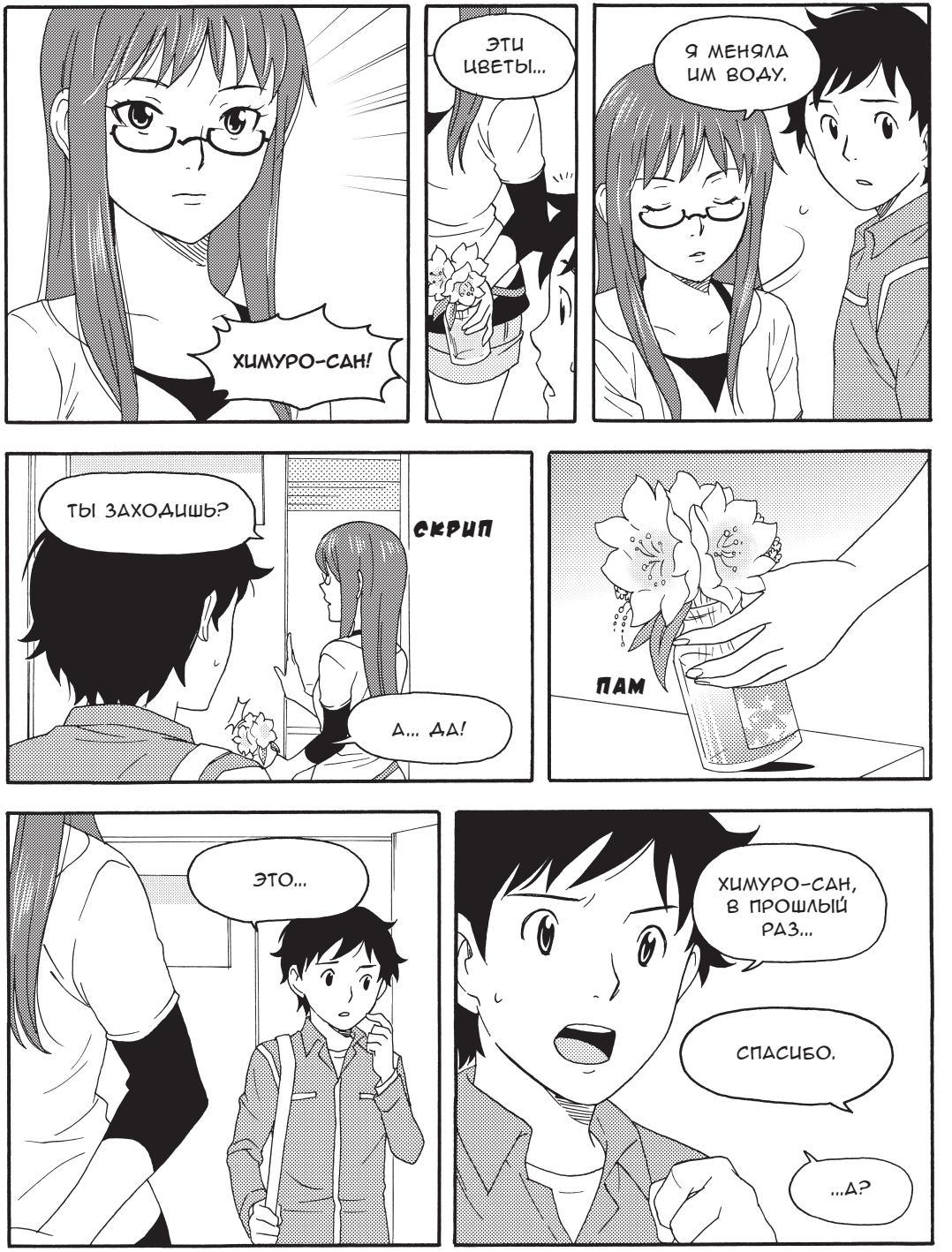
ОТ МНИМОЙ ЕДИНИЦЫ i К КОМПЛЕКСНОМУ ЧИСЛУ $a + bi$

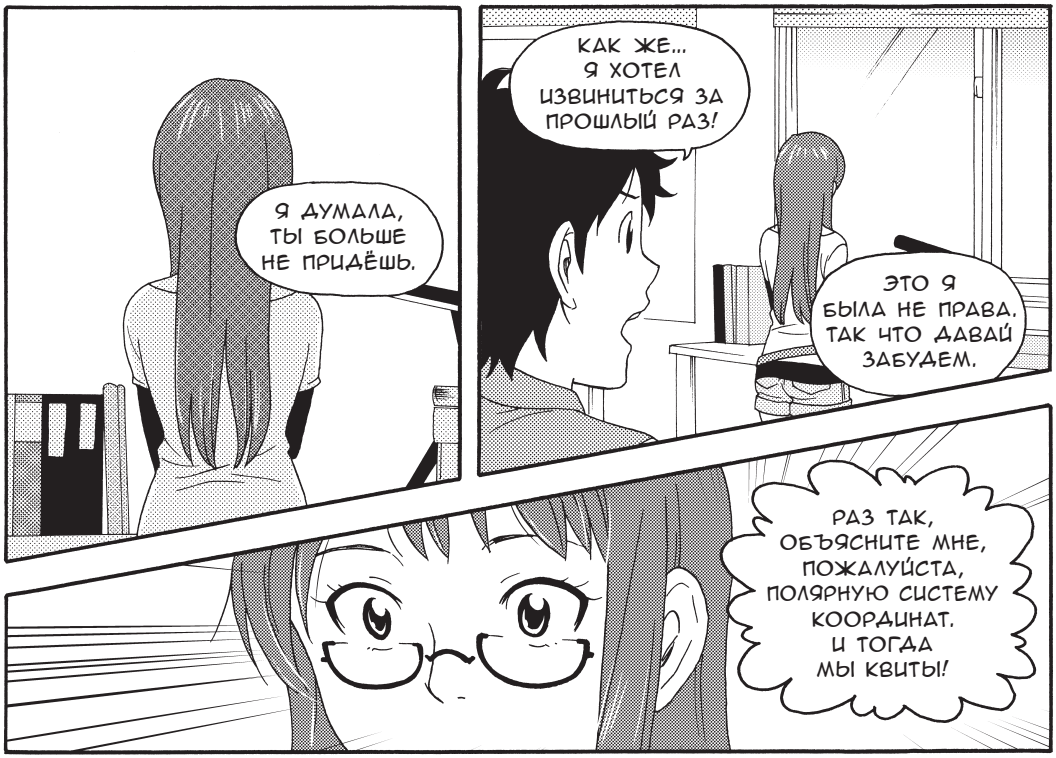

АХ-ХА-ХА-ХА
ВОТ КАК! ВЛЯПАЛСЯ ТЫ, ЗНАЧИТ, С КОРОЛЕВОЙ МАТЕМАТИКИ.
ПОХОЖЕ, Я ЧЕМ-ТО ЕЁ РАССТРОИЛ...
НУ, В ВОПРОСАХ ПРИМИРЕНИЯ МОЖЕШЬ ПОЛОЖИТЬСЯ НА МЕНЯ!


ЖЕНЩИНЕ НУЖНО ПОДАРИТЬ ЧТО-ТО СЛАДКОЕ! КАК ТОЛЬКО ОНА СЪЕСТ КАКИХ-НИБУДЬ КОНФЕТ, СРАЗУ РАСТАЕТ!
ЭЭ...


У МЕНЯ В СЕМЬЕ ПОЧТИ ОДНИ ЖЕНЩИНЫ – БАБУШКА, МАТЬ, СТАРШАЯ СЕСТРА, МЛАДШИЕ СЕСТРЫ... ТАК ЧТО Я УЖ ЗНАЮ, О ЧЁМ ГОВОРЮ!
Скромный папа
Бабушка
Мама
Старшая сестра
Я
Младшие сестры
ПРЯМО ЧИСЛОВАЯ ПРЯМАЯ ЖЕНСКОЙ ЛИНИИ...

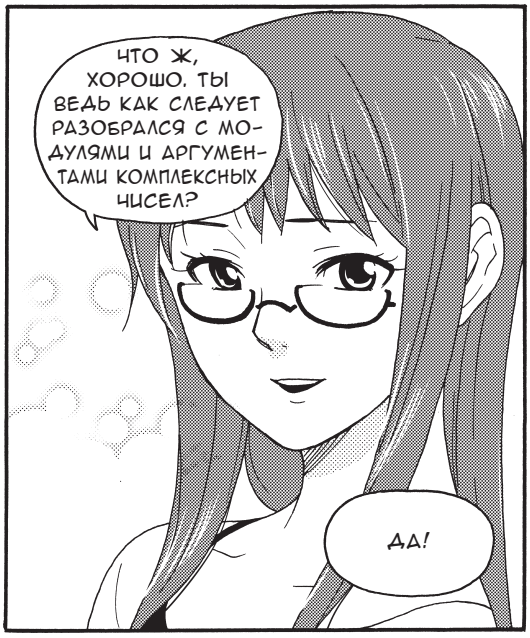

ХИМУРО-САН И ТАК ВСЁ ВРЕМЯ ЕСТ ИЛИ ПЬЁТ ЧТО-НИБУДЬ СЛАДКОЕ...
Рисовый салай
Ванильное мороженое
НАВЕРНОЕ, НА НЕЁ ЭТО НЕ ПОДЕЙСТВУЕТ.
МОЖЕТ, ЕСТЬ ЕЩЁ КАКОЙ-НИБУДЬ ХОРОШИЙ СПОСОБ?
ОЙ, ВОТ-ВОТ НАЧНЁТСЯ СЛЕДУЮЩИЙ УРОК!
НЕ-А, ДРУГОГО НЕТ.
ЛАБОРАТОРИЯ ХИМУРО
ХММММММ
КРУТЬ
ВЕРТЬ
КАК ЖЕ МНЕ ИЗВИНИТЬСЯ...
МОЖЕТ, ТЕБЕ МАТЕМАТИЧЕСКИ ИЗВИНИТЬСЯ? ПРИДУМАТЬ ЦИФРОВОЙ КОД ДЛЯ СЛОВА "ПРОСТИТЕ", НАПРИМЕР!
НЕТ, НА НЕГО ТОЧНО НЕ СТОИТ ПОЛАГАТЬСЯ...
ТЫ МНЕ МЕШАЕШЬ ПРОЙТИ...


ХИМУРО-САН!
ЭТИ ЦВЕТЫ...
Я МЕНЯЛА ИМ ВОДУ.
ТЫ ЗАХОДИШЬ?
СКРИП
А... ДА!
ПАМ
ЭТО...
ХИМУРО-САН, В ПРОШЛЫЙ РАЗ...
СПАСИБО.
...А?

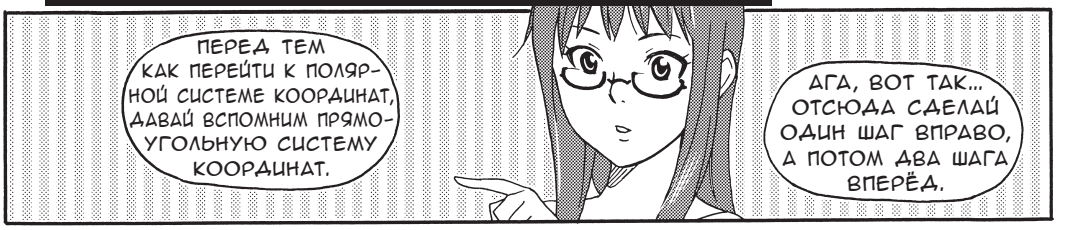

Я ДУМАЛА, ТЫ БОЛЬШЕ НЕ ПРИДЁШЬ.
КАК ЖЕ... Я ХОТЕЛ ИЗВИНИТЬСЯ ЗА ПРОШЛЫЙ РАЗ!
ЭТО Я БЫЛА НЕ ПРАВА. ТАК ЧТО ДАВАЙ ЗАБУДЕМ.
РАЗ ТАК, ОБЪЯСНИТЕ МНЕ, ПОЖАЛУЙСТА, ПОЛЯРНУЮ СИСТЕМУ КООРДИНАТ. И ТОГДА МЫ КВИТЫ!

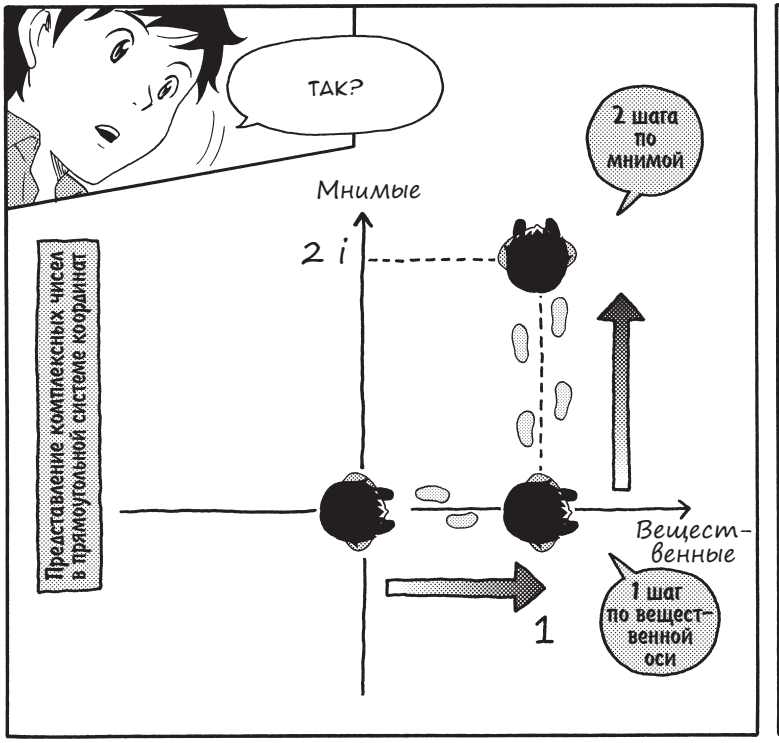

ПОЛЯРНУЮ СИСТЕМУ КООРДИНАТ?
ВЫ ЖЕ САМИ СКАЗАЛИ, ЧТО ЕСЛИ ИСПОЛЬЗОВАТЬ ПОЛЯРНУЮ СИСТЕМУ КООРДИНАТ, ТО УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ СТАНУТ КУДА ПРОЩЕ!


Хм


ЧТО Ж, ХОРОШО. ТЫ ВЕДЬ КАК СЛЕДУЕТ РАЗОБРАЛСЯ С МОДУЛЯМИ И АРГУМЕНТАМИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ?
ДА!

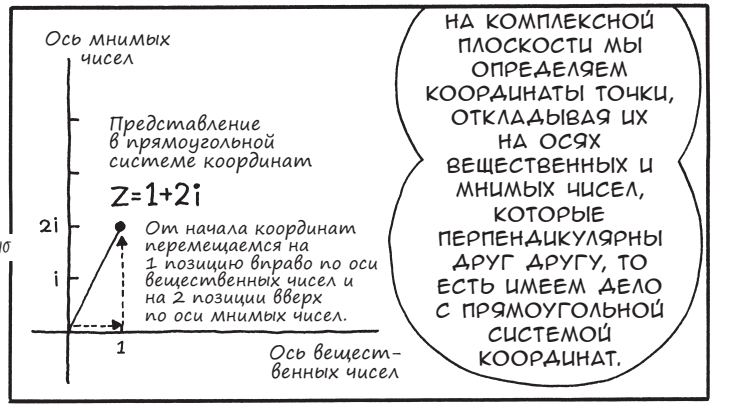
1. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ И ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ











АП

А ТЕПЕРЬ ПЕРЕЙДЁМ К ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ.

ХВАТЬ

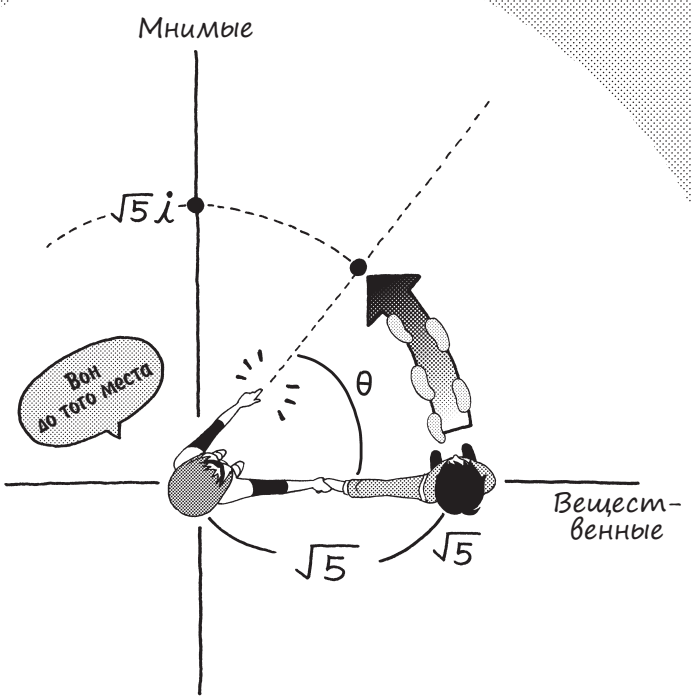
АА...?!

ПРЕДПОЛАГАЕМ, ЧТО ДЛИНА НАШИХ СОЕДИНЁННЫХ РУК РАВНА МОДУЛЮ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА.

ТУК-ТУК

ИДИ ОТСЮДА ВОТ ТУДА.

Представление в полярной системе координат



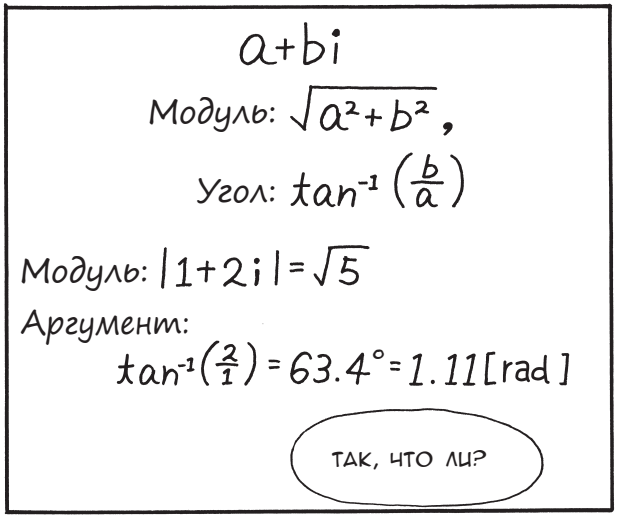
УГОЛ, НА КОТОРЫЙ ТЫ ПЕРЕМЕСТИЛСЯ, СООТВЕТСТВУЕТ АРГУМЕНТУ θ.

ВЖИХ

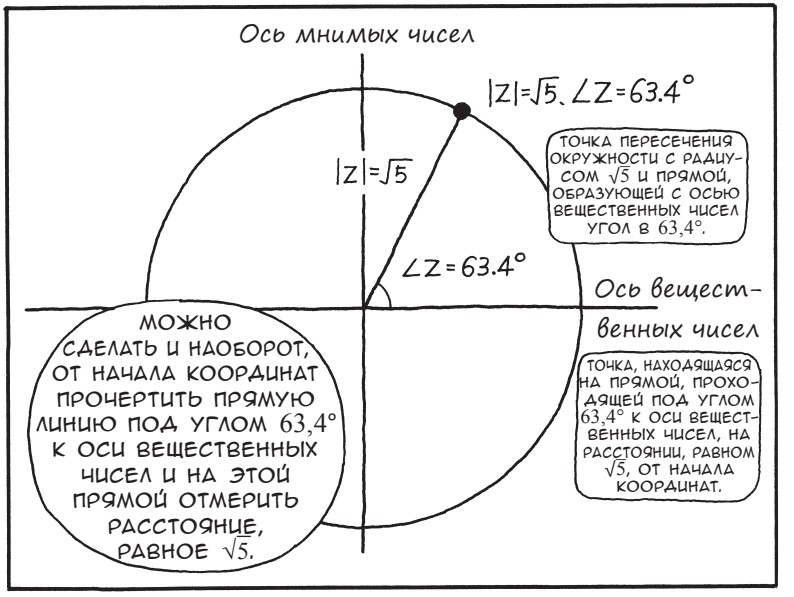
ЕСЛИ КООРДИНАТЫ ТОЧКИ ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ ТАКИМ ОБРАЗОМ – ЭТО И ЕСТЬ ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ.

АГА, ЯСНО...


давай попробуем найти координаты числа $1 + 2i$ в полярной системе координат.
для начала рассчитай модуль и аргумент этого числа.
пам
чпок
хмм...


$a+bi$
Модуль: $\sqrt{a^2+b^2}$,
Угол: $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
Модуль: $|1+2i| = \sqrt{5}$
Аргумент:
$\tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 63.4° = 1.11[\text{rad}]$
так, что ли?

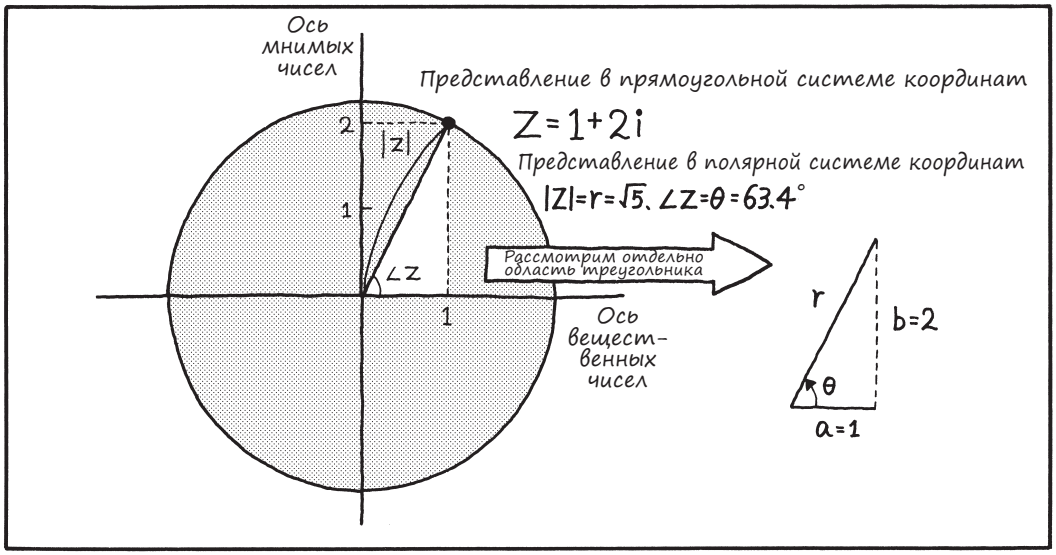

молодец, всё верно. в полярной системе координат модуль комплексного числа равен расстоянию от исходной точки.
поэтому нарисуем в комплексной плоскости окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным $\sqrt{5}$. и от начала координат проведем прямую линию под углом, равным аргументу. там, где пересекутся эта линия и окружность, и будет наше комплексное число на комплексной плоскости.


Ось мнимых чисел
$|Z|=\sqrt{5}$, $\angle Z = 63.4°$
точка пересечения окружности с радиусом $\sqrt{5}$ и прямой, образующей с осью вещественных чисел угол в 63,4°.
$|Z|=\sqrt{5}$
$\angle Z = 63.4°$
Ось вещественных чисел
можно сделать и наоборот, от начала координат прочертить прямую линию под углом 63,4° к оси вещественных чисел и на этой прямой отмерить расстояние, равное $\sqrt{5}$.
точка, находящаяся на прямой, проходящей под углом 63,4° к оси вещественных чисел, на расстоянии, равном $\sqrt{5}$, от начала координат.


то есть если мы знаем расстояние от начала координат r и угол θ...
...то можем определить координаты точки на плоскости.


ПОЛУЧАЕТСЯ, ЕСЛИ РАССЧИТАТЬ МОДУЛЬ И АРГУМЕНТ, ТО МОЖНО ПЕРЕЙТИ ИЗ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ПОЛЯРНУЮ, ВЕРНО?
А НАОБОРОТ ТОЖЕ ВОЗМОЖНО?


ЕСЛИ ИСПОЛЬЗОВАТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ТО МОЖНО ОТ ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТ ТОЧКИ ПЕРЕЙТИ К ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ.
СНАЧАЛА РАССМОТРИМ И ТЕ, И ДРУГИЕ.
СКРИП


Ось мнимых чисел
Представление в прямоугольной системе координат
Z = 1+2i
Представление в полярной системе координат
|Z|=r=√5, ∠Z=θ=63.4°
|z|
2
1
∠z
1
Рассмотрим отдельно область треугольника
Ось вещественных чисел
r
b=2
θ
a=1


ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТОЧКИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ БУДЕТ ВЫГЛЯДЕТЬ ТАК: $a + bi$.
Представление в прямоугольной системе координат
в полярной системе координат
НО ТУ ЖЕ САМУЮ ТОЧКУ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ МОЖНО ВЫРАЗИТЬ ЧЕРЕЗ РАДИУС $r = |Z|$ И АРГУМЕНТ $\theta = \angle Z$.


ПОПРОБУЕМ ПЕРЕЙТИ ОТ ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТ К ПРЯМОУГОЛЬНЫМ.

$|z| = r$

$\angle z = \theta$

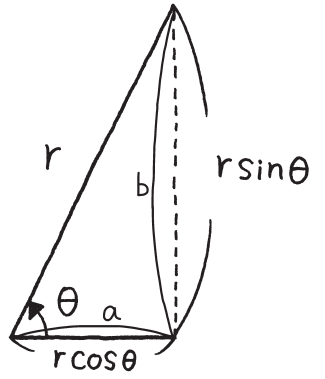
ИСХОДЯ ИЗ ЭТОГО...

...ВЕЩЕСТВЕННАЯ ЧАСТЬ БУДЕТ РАВНА $r \cdot \cos\theta$, А МНИМАЯ ЧАСТЬ БУДЕТ $r \cdot \sin\theta$.

СКРИП

$\cos\theta = \frac{a}{r}$, следовательно, $a = r\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{b}{r}$, следовательно, $b = r\sin\theta$



ТОЧНО ТАК ЖЕ МЫ НАХОДИМ x И y В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ, КОГДА ИЗВЕСТЕН УГОЛ, ДА?

Вещественная часть + Мнимая часть =

$r\cos\theta + ir\sin\theta$

А ТЕПЕРЬ В ЭТОЙ ФОРМУЛЕ ЗАМЕНИМ r НА МОДУЛЬ, А θ – НА АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА.

$= |z|\{\cos(\angle z) + i\sin(\angle z)\}$

Вещественная часть + Мнимая часть

ВОТ МЫ И ПЕРЕШЛИ К ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ.





$$= |z|\{\cos(\angle z) + i\sin(\angle z)\}$$
$$= \sqrt{5}\{\cos(63.4°) + i\sin(63.4°)\}$$
$$= 2.236\,(0.453 + 0.891i)$$
$$= 1.01 + 1.99\,i$$









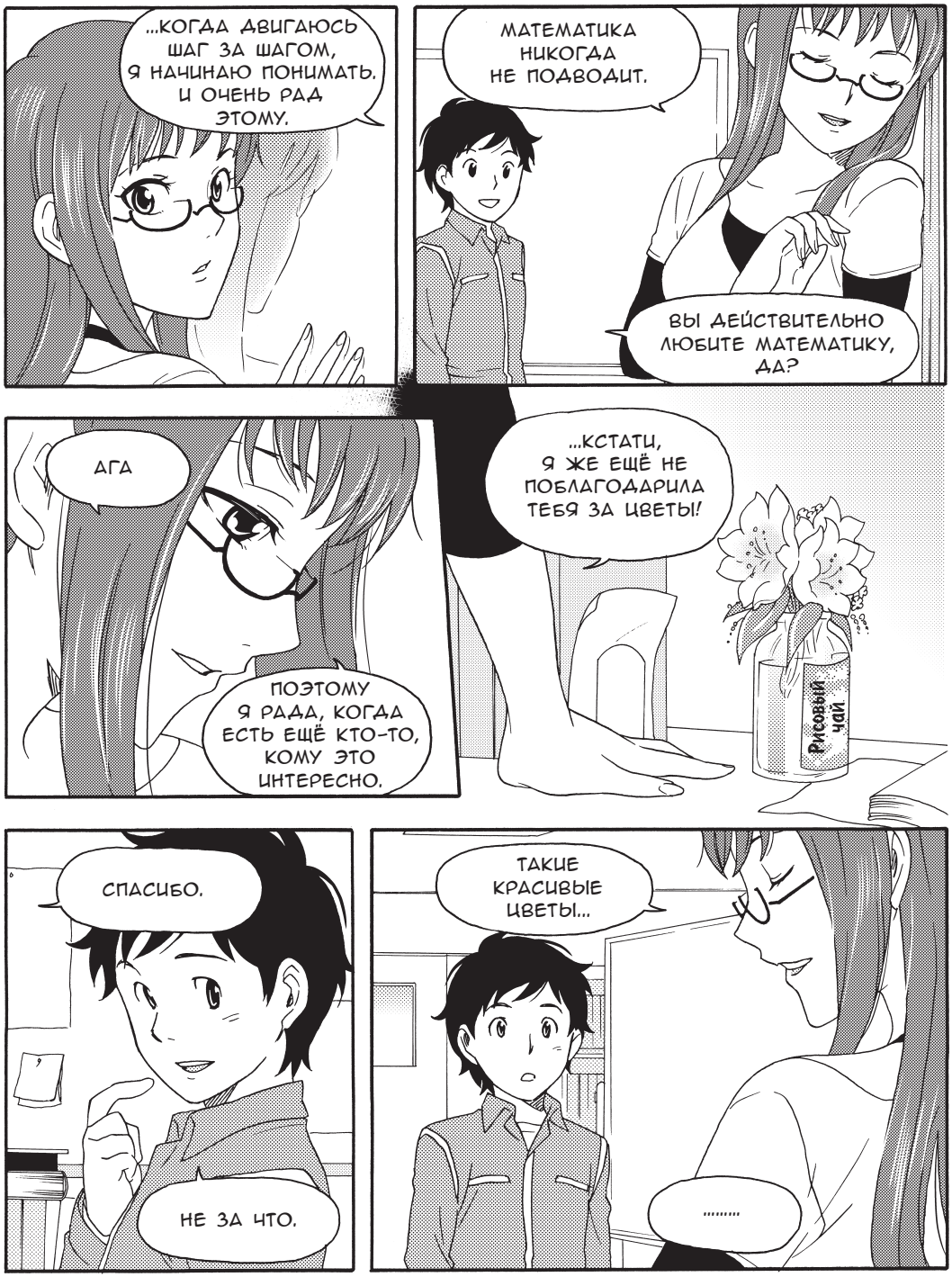
* Про число Непера см. на стр. 102, а про матрицу поворота – на стр. 126.

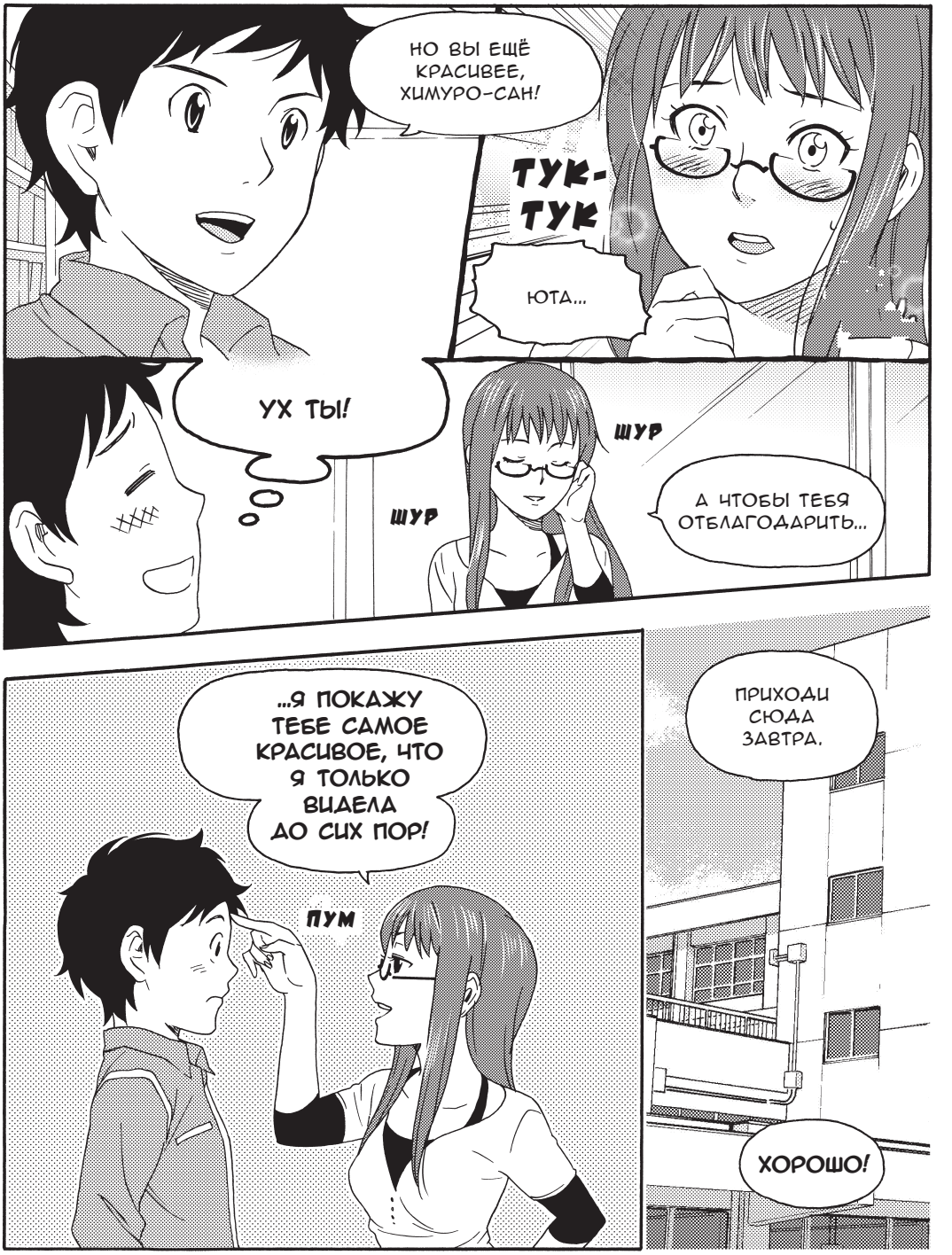









...КОГДА ДВИГАЮСЬ ШАГ ЗА ШАГОМ, Я НАЧИНАЮ ПОНИМАТЬ. И ОЧЕНЬ РАД ЭТОМУ.
МАТЕМАТИКА НИКОГДА НЕ ПОДВОДИТ.
ВЫ ДЕЙСТВИТЕЛЬНО ЛЮБИТЕ МАТЕМАТИКУ, ДА?
АГА
ПОЭТОМУ Я РАДА, КОГДА ЕСТЬ ЕЩЁ КТО-ТО, КОМУ ЭТО ИНТЕРЕСНО.
...КСТАТИ, Я ЖЕ ЕЩЁ НЕ ПОБЛАГОДАРИЛА ТЕБЯ ЗА ЦВЕТЫ!
Рисовый чай
СПАСИБО.
НЕ ЗА ЧТО.
ТАКИЕ КРАСИВЫЕ ЦВЕТЫ...
.....


НО ВЫ ЕЩЁ КРАСИВЕЕ, ХИМУРО-САН!
ТУК-ТУК
ЮТА...
УХ ТЫ!
ШУР
ШУР
А ЧТОБЫ ТЕБЯ ОТБЛАГОДАРИТЬ...
...Я ПОКАЖУ ТЕБЕ САМОЕ КРАСИВОЕ, ЧТО Я ТОЛЬКО ВИДЕЛА ДО СИХ ПОР!
ПУМ
ПРИХОДИ СЮДА ЗАВТРА.
ХОРОШО!

2. УПРАЖНЕНИЯ

Переведите представление комплексных чисел из прямоугольной системы координат в полярную систему координат, и наоборот.

❶ $4+4i$ ❷ $\sqrt{3}+i$ ❸ $5-5\sqrt{3}i$ ❹ $5i$ ❺ $-1+i$

❻ $-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}i$ ❼ $3e^{\frac{\pi}{4}i}$ ❽ $6e^{\frac{\pi}{3}i}$ ❾ $2e^{\frac{\pi}{6}i}$ ❿ $\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$

Решение

❶
$$\begin{aligned} 4+4i &= \sqrt{4^2+4^2}e^{i\tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)} \\ &= \sqrt{16+16}e^{i\tan^{-1}(1)} \\ &= \sqrt{2\times 16}e^{i45^\circ} \\ &= 4\sqrt{2}e^{i45^\circ} \\ &= 4\sqrt{2}\angle 45^\circ \\ &= 4\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Другой способ решения
$$\begin{aligned} 4+4i &= \sqrt{4^2+4^2}\left(\frac{4+4i}{\sqrt{4^2+4^2}}\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\frac{4+4i}{4\sqrt{2}}\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= 4\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) \\ &= 4\sqrt{2}e^{i45^\circ} \\ &= 4\sqrt{2}\angle 45^\circ \\ &= 4\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

❷ $\sqrt{3}+i = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}e^{\,i\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

$= \sqrt{3+1}e^{i30^\circ}$

$= \sqrt{4}e^{i30^\circ}$

$= 2e^{i30^\circ}$

$= 2\angle 30^\circ$

$= 2\angle \frac{\pi}{6}$

Другой способ решения

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}+i &= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}}\right) \\
&= \sqrt{4}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{4}}\right) \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right) \\
&= 2\left(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right) \\
&= 2e^{i30^\circ} \\
&= 2\angle 30^\circ \\
&= 2\angle \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

❸ $$\begin{aligned}
5-5\sqrt{3}i &= \sqrt{5^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2}e^{\,i\tan^{-1}\left(\frac{-5\sqrt{3}}{5}\right)} \\
&= \sqrt{25+25\times 3}e^{i\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)} \\
&= \sqrt{25\times(1+3)}e^{-i60^\circ} \\
&= \sqrt{5^2\times 4}e^{-i60^\circ} \\
&= 5\sqrt{2^2}e^{-i60^\circ} \\
&= 5\times 2e^{-i60^\circ} \\
&= 10e^{-i60^\circ} \\
&= 10\angle(-60^\circ) \\
&= 10\angle\left(-\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Другой способ решения

$$\begin{aligned}
5-5\sqrt{3}i &= \sqrt{5^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2}\left(\frac{5-5\sqrt{3}i}{\sqrt{5^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2}}\right)\\
&= 10\left(\frac{5-5\sqrt{3}i}{10}\right)\\
&= 10\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= 10\left(\cos\left(-60^\circ\right)+i\sin\left(-60^\circ\right)\right)\\
&= 10e^{i(-60^\circ)}\\
&= 10\angle\left(-60^\circ\right)\\
&= 10\angle\left(-\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Пояснение

$$\begin{aligned}
5-5\sqrt{3}i &= 5\left(1-\sqrt{3}i\right)\\
&= 5\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}\,\frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}}\\
&= 5\sqrt{4}\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{4}}\right)\\
&= 10\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= 10\left(\cos\left(-60^\circ\right)+i\sin\left(-60^\circ\right)\right)\\
&= 10e^{i(-60^\circ)}\\
&= 10\angle\left(-60^\circ\right)\\
&= 10\angle\left(-\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

❹ $$\begin{aligned}
5i &= 5e^{i90^\circ}\\
&= 5\angle 90^\circ\\
&= 5\angle\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$



5i находится на оси мнимых чисел

Другой способ решения

$$\begin{aligned}
5i &= 5\left(0+i\right)\\
&= 5\left(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ\right)\\
&= 5^{i90^\circ}\\
&= 5\angle 90^\circ\\
&= 5\angle\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

❺ $$\begin{aligned} -1+i &= \sqrt{(-1)^2+1^2}e^{i\tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right)} \\ &= \sqrt{2}e^{i\tan^{-1}(-1)} \\ &= \sqrt{2}e^{i135^\circ} \\ &= \sqrt{2}\angle 135^\circ \\ &= \sqrt{2}\angle\frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

Другой способ решения

$$\begin{aligned} -1+i &= \sqrt{(-1)^2+1^2}\frac{-1+i}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(135^\circ+\sin 135^\circ\right)\right) \\ &= \sqrt{2}e^{i135^\circ} \\ &= \sqrt{2}\angle 135^\circ \\ &= \sqrt{2}\angle\frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

❻ $$\begin{aligned} -\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}i &= \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}e^{i\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{3}}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}e^{i\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{3}}\times\frac{3}{3}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1+3}{9}}e^{i\tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{4}{9}}e^{i\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{2}{3}e^{i240^\circ} \\ &= \frac{2}{3}\angle 240^\circ \\ &= \frac{2}{3}\angle\frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

Другой способ решения

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}i &= \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\left(\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}i}{\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}}\right)\\
&= \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}\left(\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}i}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}}\right)\\
&= \sqrt{\frac{1+3}{9}}\left(\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}i}{\sqrt{\frac{1+3}{9}}}\right)\\
&= \sqrt{\frac{4}{9}}\left(\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}i}{\sqrt{\frac{4}{9}}}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}i}{\frac{2}{3}}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}i}{\frac{2}{3}}\times\frac{3}{3}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{-1-\frac{3}{\sqrt{3}}i}{2}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ\right)\\
&= \frac{2}{3}e^{i240^\circ}\\
&= \frac{2}{3}\angle 240^\circ\\
&= \frac{2}{3}\angle\frac{4}{3}\pi
\end{aligned}
$$

❼ $$\begin{aligned} 3e^{\frac{\pi}{4}i} &= 3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &= 3\left(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ\right)\\ &= 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\ &= 3\frac{1+i}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{3+3i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

❽ $$\begin{aligned} 6e^{\frac{\pi}{3}i} &= 6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\ &= 6\left(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ\right)\\ &= 6\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &= 3+3\sqrt{3}i \end{aligned}$$

❾ $$\begin{aligned} 2e^{\frac{\pi}{6}i} &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\ &= 2\left(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ\right)\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\ &= \sqrt{3}+i \end{aligned}$$

❿ $$\begin{aligned} \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i} &= \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= \sqrt{3}\left(\cos\left(-30^\circ\right)+i\sin\left(-30^\circ\right)\right)\\ &= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\\ &= \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Глава

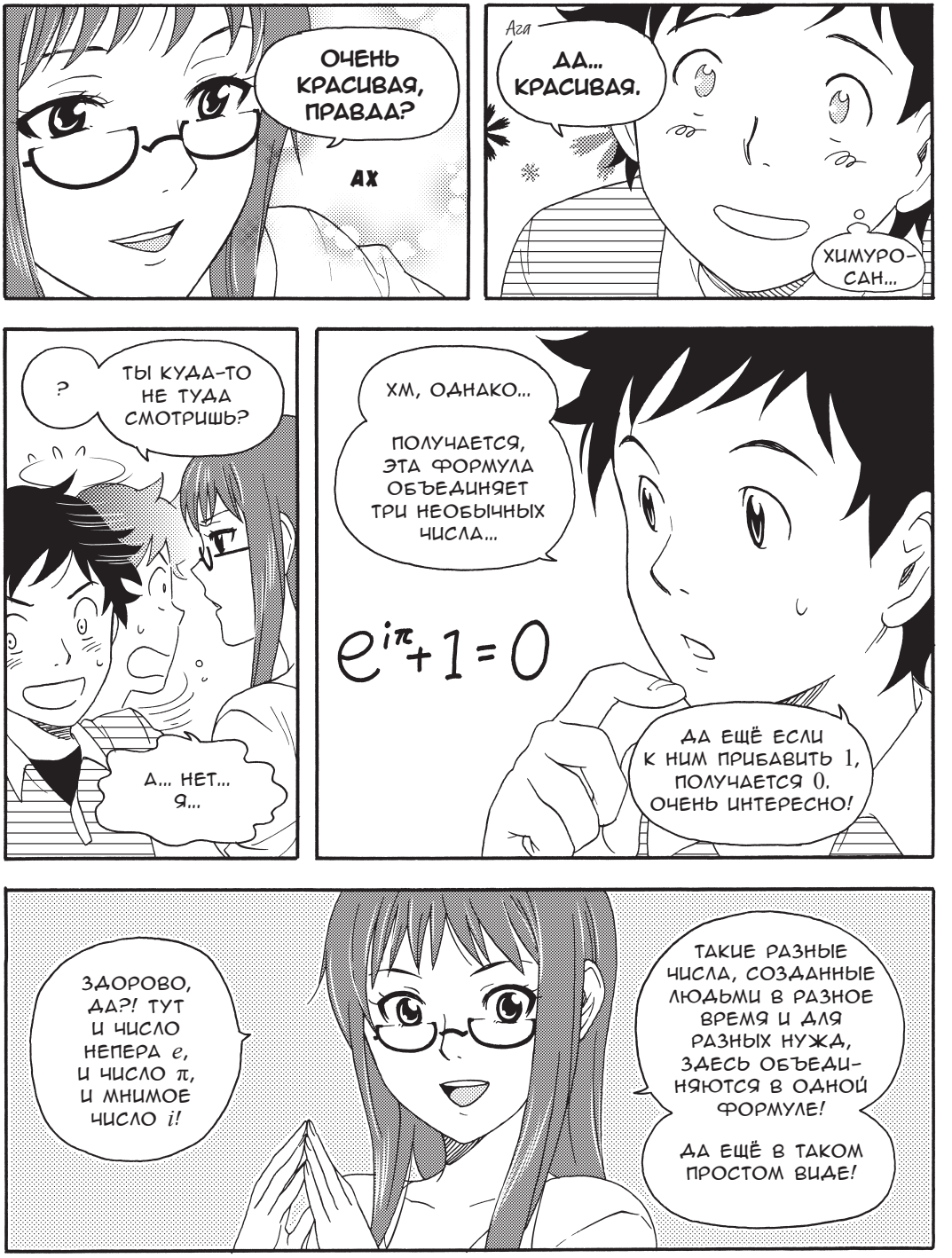
4

ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА, СВЯЗЫВАЮЩАЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНУЮ ФУНКЦИЮ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

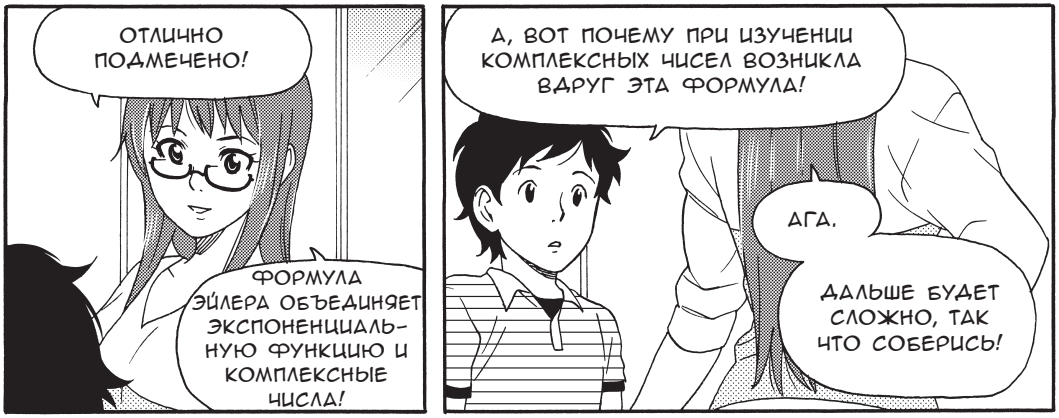



ШОРХ
СКРИП
ЭТО – ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА!
ПА-
$e^{i\pi}+1=0.$
-ПАМ!
НУ, КАК? СКАЖИ, КРАСИВАЯ!
ЭЙ, ТЫ ЧЕГО ТАМ ДУРАЧИШЬСЯ?
КАК СЛЕДУЕТ ПОСМОТРИ НА ЭТУ ФОРМУЛУ!


ОЧЕНЬ КРАСИВАЯ, ПРАВДА?
АХ
Ага
ДА... КРАСИВАЯ.
ХИМУРО-САН...
ТЫ КУДА-ТО НЕ ТУДА СМОТРИШЬ?
?
А... НЕТ... Я...
ХМ, ОДНАКО...
ПОЛУЧАЕТСЯ, ЭТА ФОРМУЛА ОБЪЕДИНЯЕТ ТРИ НЕОБЫЧНЫХ ЧИСЛА...
$e^{i\pi}+1=0$
ДА ЕЩЁ ЕСЛИ К НИМ ПРИБАВИТЬ 1, ПОЛУЧАЕТСЯ 0. ОЧЕНЬ ИНТЕРЕСНО!
ЗДОРОВО, ДА?! ТУТ И ЧИСЛО НЕПЕРА e, И ЧИСЛО π, И МНИМОЕ ЧИСЛО i!
ТАКИЕ РАЗНЫЕ ЧИСЛА, СОЗДАННЫЕ ЛЮДЬМИ В РАЗНОЕ ВРЕМЯ И ДЛЯ РАЗНЫХ НУЖД, ЗДЕСЬ ОБЪЕДИНЯЮТСЯ В ОДНОЙ ФОРМУЛЕ!
ДА ЕЩЁ В ТАКОМ ПРОСТОМ ВИДЕ!


А ВОТ БОЛЕЕ ОБЩИЙ ВИД ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА.
ЕСЛИ ПОДСТАВИТЬ $\theta = \pi$ [RAD], ПОЛУЧИТСЯ КАК РАЗ ПРЕДЫДУЩАЯ ФОРМУЛА.
СКРИП
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

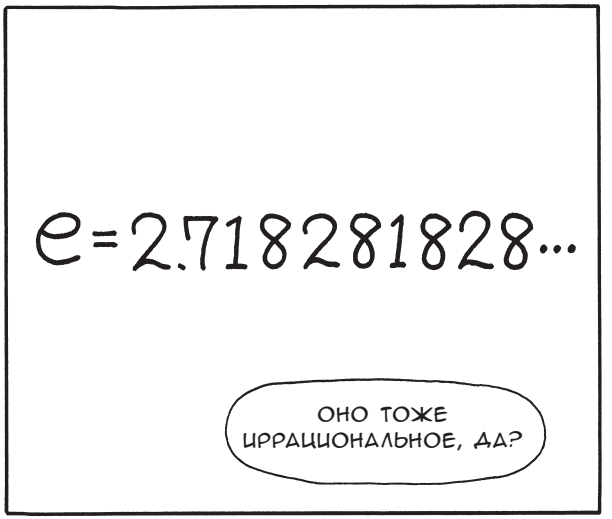

АГА, ЭТО ПОТОМУ, ЧТО ЕСЛИ $\theta = \pi$, ТО $\cos\theta = -1$, А $\sin\theta = 0$, ДА?
Вид графика, если $\theta=\pi$
$\theta=\pi$ [rad]
ПОЛУЧАЕТСЯ, ЧТО В ПРАВОЙ ЧАСТИ ФОРМУЛЫ – КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО?


ОТЛИЧНО ПОДМЕЧЕНО!
ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ОБЪЕДИНЯЕТ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНУЮ ФУНКЦИЮ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА!
А, ВОТ ПОЧЕМУ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ ВОЗНИКЛА ВДРУГ ЭТА ФОРМУЛА!
АГА.
ДАЛЬШЕ БУДЕТ СЛОЖНО, ТАК ЧТО СОБЕРИСЬ!

2. ЧИСЛО НЕПЕРА (ОСНОВАНИЕ НАТУРАЛЬНОГО ЛОГАРИФМА) e

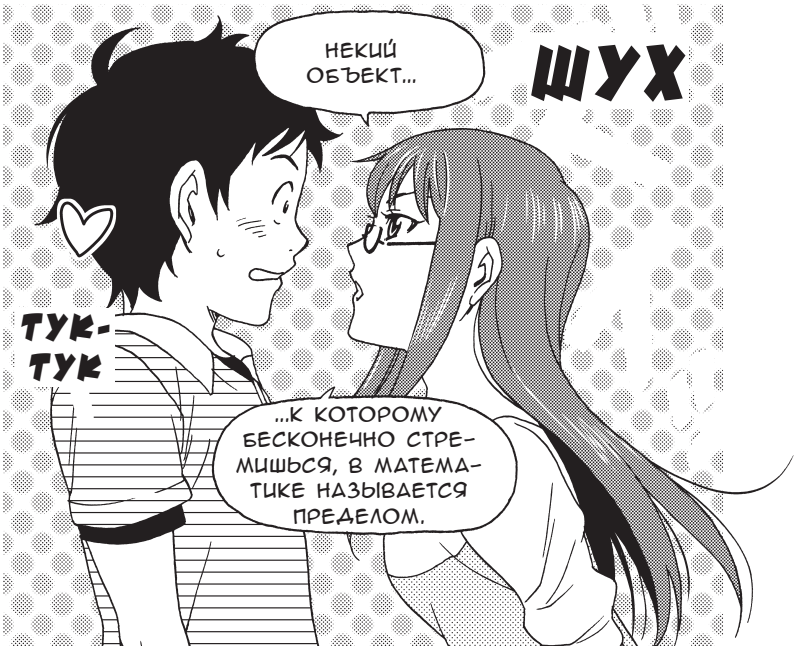


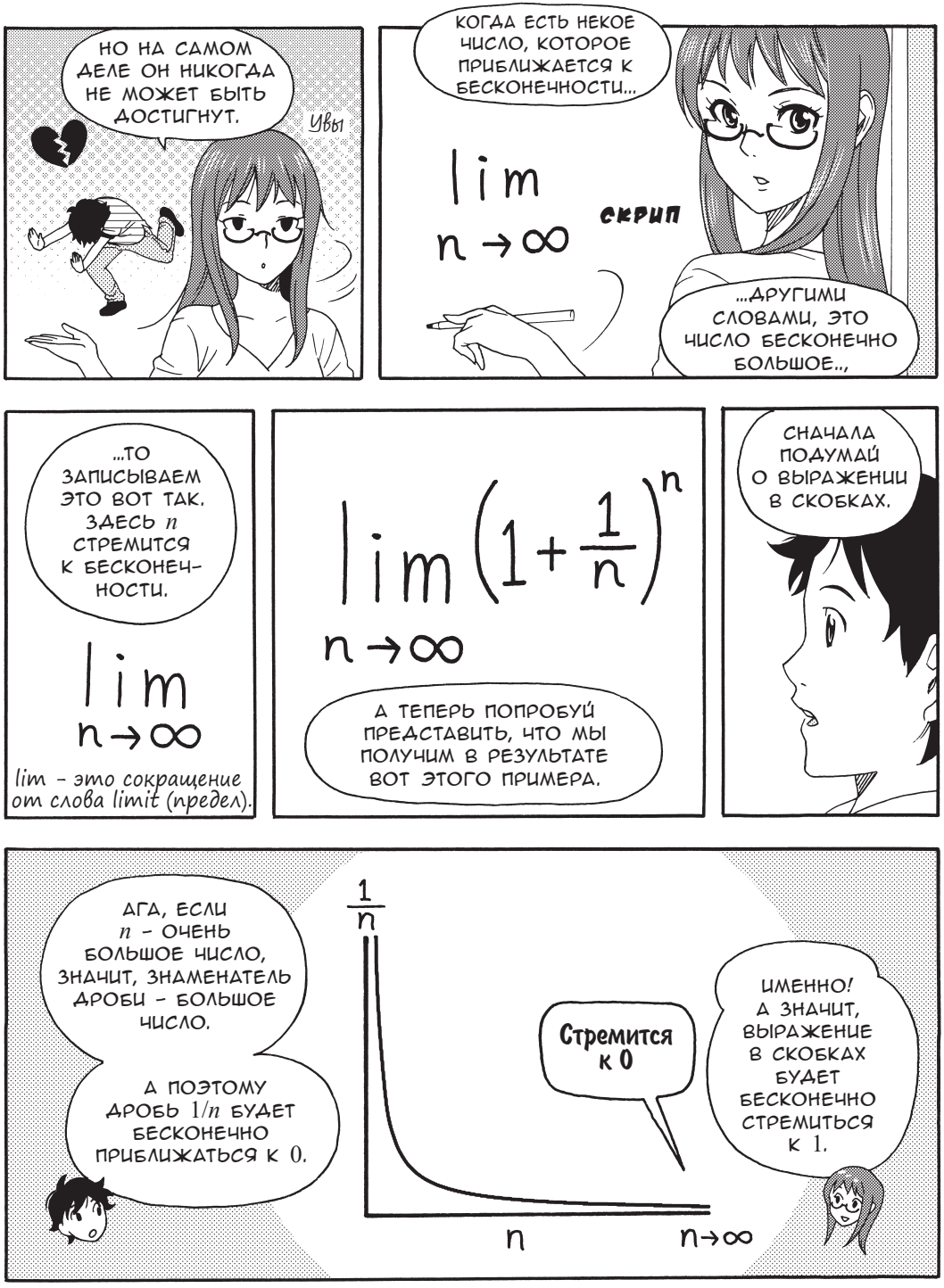




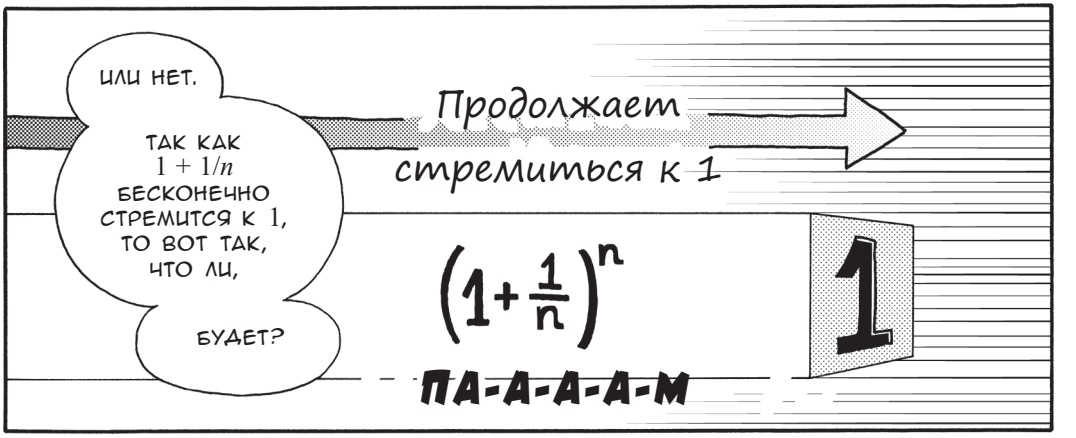


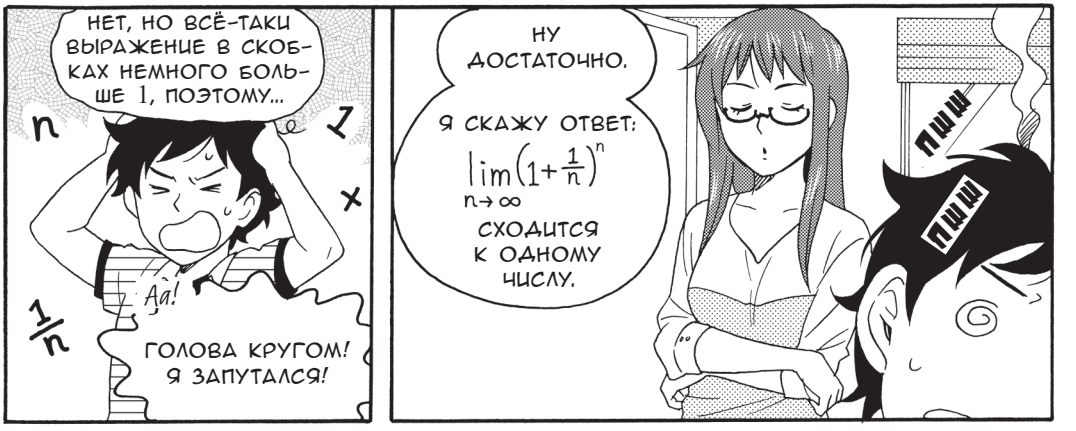




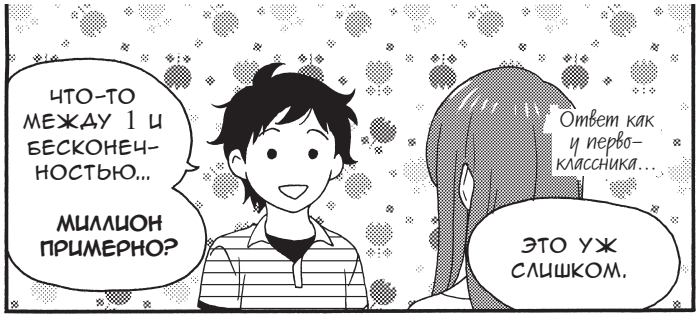

НО НА САМОМ ДЕЛЕ ОН НИКОГДА НЕ МОЖЕТ БЫТЬ ДОСТИГНУТ.
УВЫ
КОГДА ЕСТЬ НЕКОЕ ЧИСЛО, КОТОРОЕ ПРИБЛИЖАЕТСЯ К БЕСКОНЕЧНОСТИ...
$\lim_{n\to\infty}$
СКРИП
...ДРУГИМИ СЛОВАМИ, ЭТО ЧИСЛО БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЕ...
...ТО ЗАПИСЫВАЕМ ЭТО ВОТ ТАК. ЗДЕСЬ n СТРЕМИТСЯ К БЕСКОНЕЧНОСТИ.
$\lim_{n\to\infty}$
lim – это сокращение от слова limit (предел).
$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
А ТЕПЕРЬ ПОПРОБУЙ ПРЕДСТАВИТЬ, ЧТО МЫ ПОЛУЧИМ В РЕЗУЛЬТАТЕ ВОТ ЭТОГО ПРИМЕРА.
СНАЧАЛА ПОДУМАЙ О ВЫРАЖЕНИИ В СКОБКАХ.
АГА, ЕСЛИ n – ОЧЕНЬ БОЛЬШОЕ ЧИСЛО, ЗНАЧИТ, ЗНАМЕНАТЕЛЬ ДРОБИ – БОЛЬШОЕ ЧИСЛО.
А ПОЭТОМУ ДРОБЬ $1/n$ БУДЕТ БЕСКОНЕЧНО ПРИБЛИЖАТЬСЯ К 0.
$\frac{1}{n}$
Стремится к 0
n
$n\to\infty$
ИМЕННО! А ЗНАЧИТ, ВЫРАЖЕНИЕ В СКОБКАХ БУДЕТ БЕСКОНЕЧНО СТРЕМИТЬСЯ К 1.

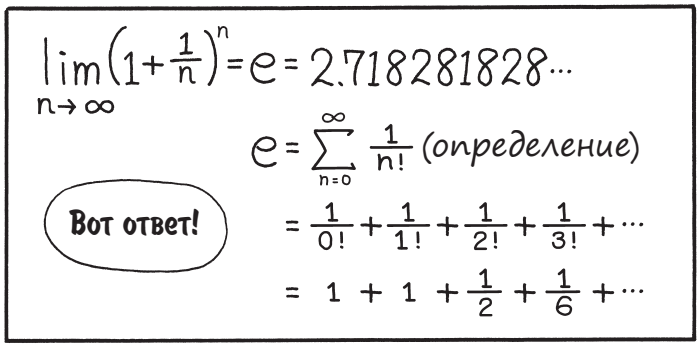

ОДНАКО ВЫРАЖЕНИЕ В СКОБКАХ $(1 + 1/n)^n$ ВОЗВОДИТСЯ В СТЕПЕНЬ n...
Чем больше n, тем больше значение $(1+\frac{1}{n})^n$!
n
А ЗНАЧИТ, ЧТО ЕСЛИ ТО, ЧТО В СКОБКАХ, ХОТЬ НЕМНОГО БОЛЬШЕ 1,
ТО ЧЕМ БОЛЬШЕ ЗНАЧЕНИЕ n, ТЕМ БОЛЬШЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $(1 + 1/n)^n$, ТО ЕСТЬ ОНО ТОЖЕ СТРЕМИТСЯ К БЕСКОНЕЧНОСТИ...
$(1+\frac{1}{n})^n$
ВЖУ-У-У-УХ


ИЛИ НЕТ.
ТАК КАК $1 + 1/n$ БЕСКОНЕЧНО СТРЕМИТСЯ К 1, ТО ВОТ ТАК, ЧТО ЛИ,
БУДЕТ?
Продолжает стремиться к 1
$(1+\frac{1}{n})^n$
1
ПА-А-А-А-М


НЕТ, НО ВСЁ-ТАКИ ВЫРАЖЕНИЕ В СКОБКАХ НЕМНОГО БОЛЬШЕ 1, ПОЭТОМУ...
n
1
x
1/n
Ай!
ГОЛОВА КРУГОМ! Я ЗАПУТАЛСЯ!
НУ ДОСТАТОЧНО.
Я СКАЖУ ОТВЕТ:
$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$
СХОДИТСЯ К ОДНОМУ ЧИСЛУ.
ПШШ
ПШШ


"СХОДИТСЯ" – ЭТО И ЗНАЧИТ "БЕСКОНЕЧНО ПРИБЛИЖАЕТСЯ".

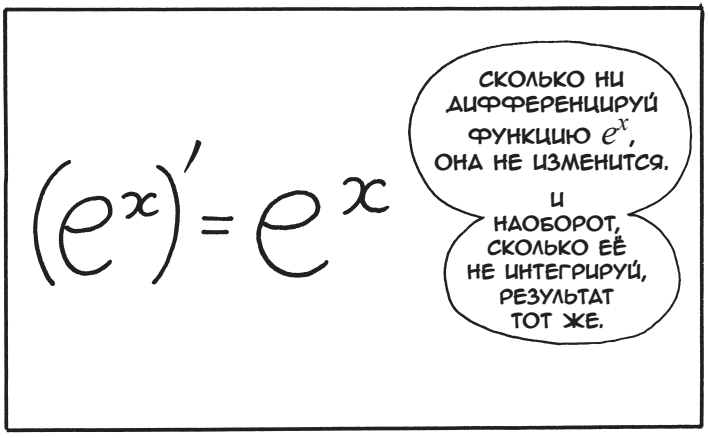

ЧТО-ТО МЕЖДУ 1 И БЕСКОНЕЧНОСТЬЮ...
МИЛЛИОН ПРИМЕРНО?
Ответ как у первоклассника...
ЭТО УЖ СЛИШКОМ.


$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718281828\cdots$
$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (определение)
$= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$
$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots$
Вот ответ!


ВОТ ОНО ЧТО! ЭТО ЧИСЛО НЕПЕРА!
АГА, ЭТО И ЕСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА НЕПЕРА.


ЧИСЛО НЕПЕРА ВОЗНИКЛО НА ГРАНИЦЕ МЕЖДУ...
...БЕСКОНЕЧНЫМ СТРЕМЛЕНИЕМ К 1 И СТРЕМЛЕНИЕМ К БЕСКОНЕЧНОСТИ.
Сюда давай!
УФ-ФУ-ФУХ
Число Непера
Нет, сюда!


КАЖЕТСЯ, ЭТО ОЧЕНЬ НАПРЯЖЁННОЕ ПОЛОЖЕНИЕ.
А ВОЗВЕДЁННОЕ В СТЕПЕНЬ, ЧИСЛО e ОБЛАДАЕТ ОСОБЕННЫМ СВОЙСТВОМ.


$(e^x)' = e^x$
СКОЛЬКО НИ ДИФФЕРЕНЦИРУЙ ФУНКЦИЮ e^x, ОНА НЕ ИЗМЕНИТСЯ.
И НАОБОРОТ, СКОЛЬКО ЕЁ НЕ ИНТЕГРИРУЙ, РЕЗУЛЬТАТ ТОТ ЖЕ.



$$\int y\,dx = \int (ax^2+bx+c)\,dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + cx + d$$

Интегрируем по x

$$y = ax^2 + bx + c$$

Дифференцируем по x

$$y' = 2ax + b$$

(d называется константой интегрирования, может быть любым вещественным числом)

А ТЕПЕРЬ ЕСЛИ: $y = e^x$

$$\int y\,dx = \int e^x dx = e^x + d$$

Интегрируем по x

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

Дифференцируем по x

При интегрировании, правда, появляется константа (d – константа интегрирования)

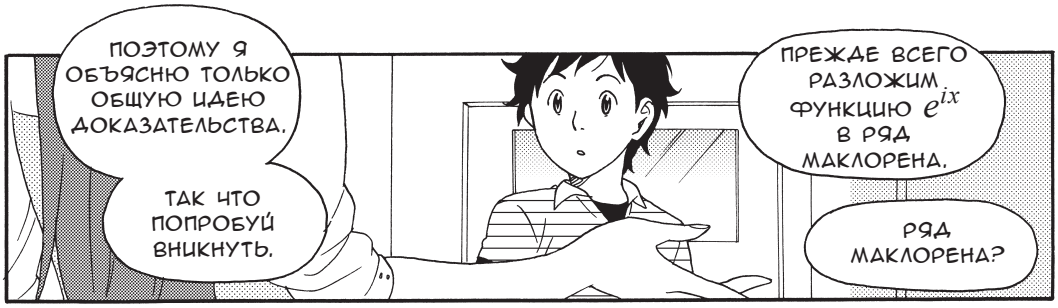


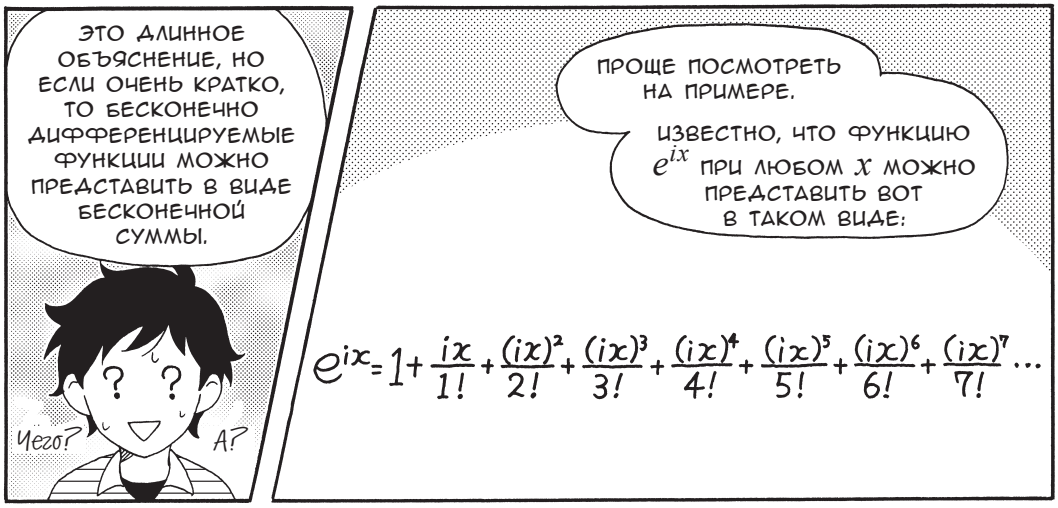
3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$









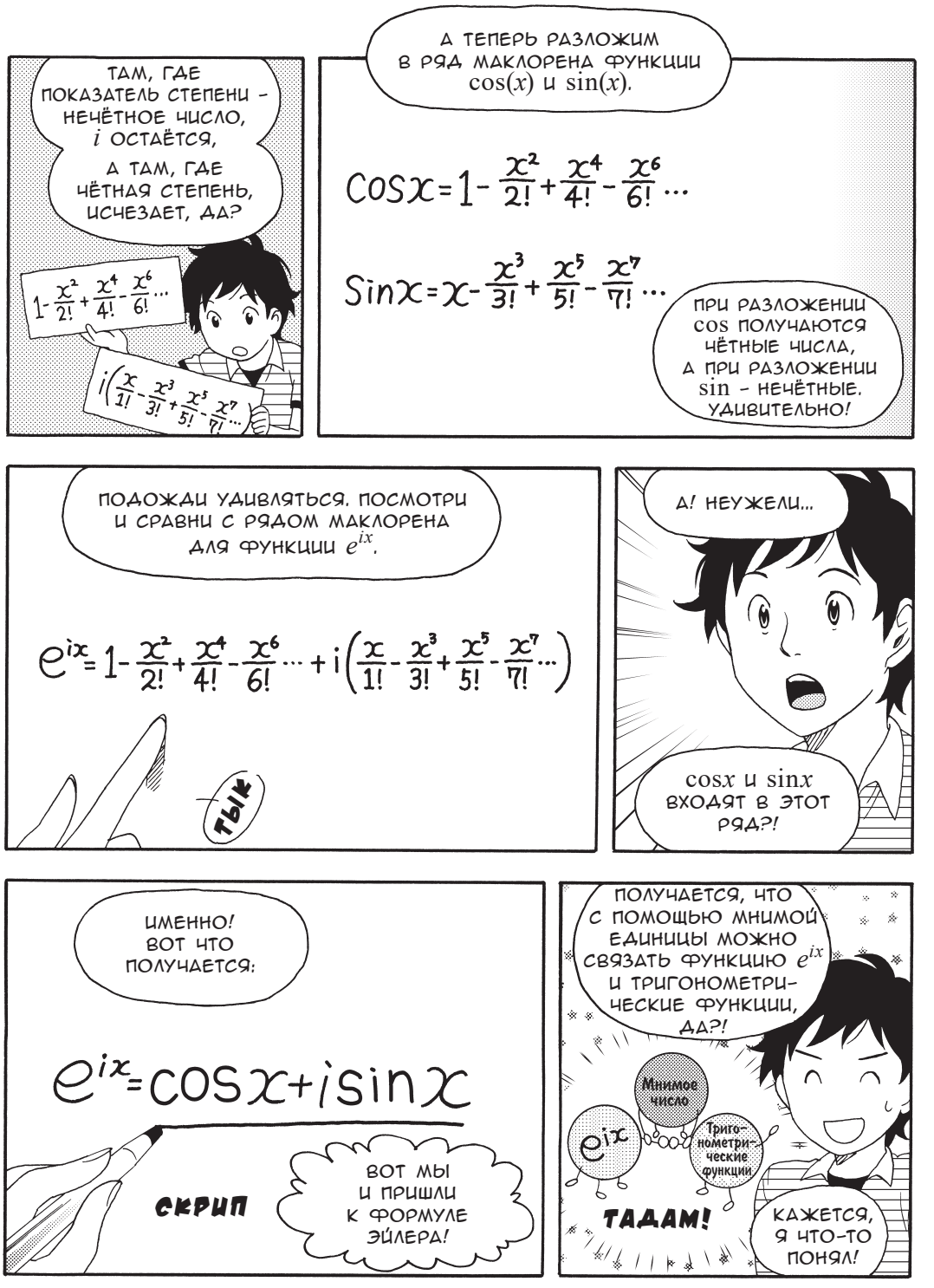


$$n!=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$$

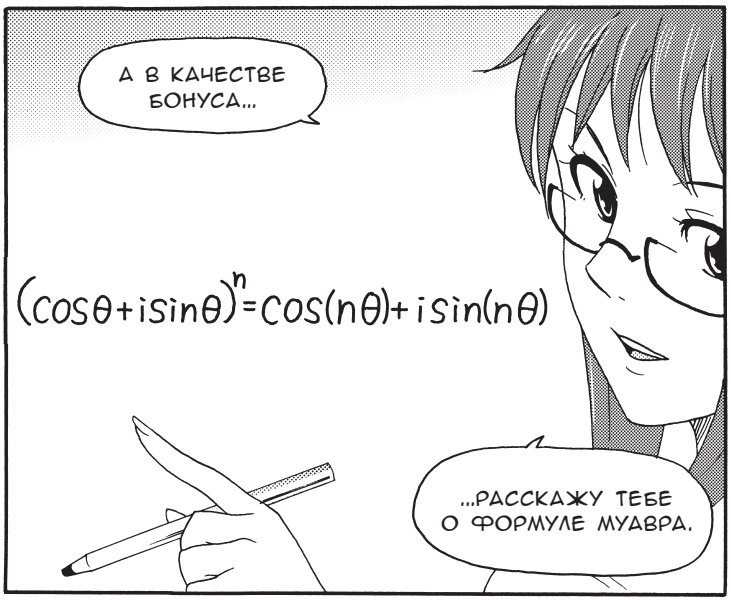
$n!$ ОЗНАЧАЕТ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЧИСЕЛ ОТ 1 ДО n. $0!=0$ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ.

$$e^{ix}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\cdots+i\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots\right)$$

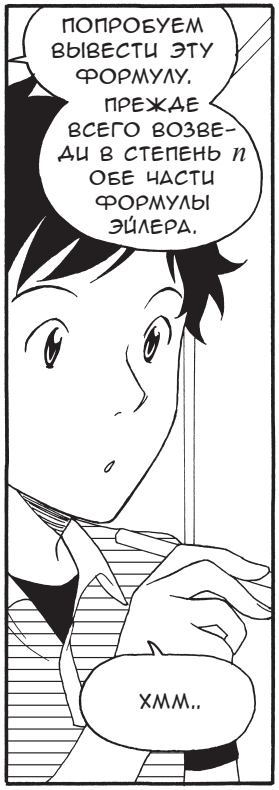
А ТЕПЕРЬ, УЧИТЫВАЯ, ЧТО $i^2=-1$, МОЖЕМ ПЕРЕПИСАТЬ НАШУ ФОРМУЛУ.


А теперь разложим в ряд Маклорена функции $\cos(x)$ и $\sin(x)$.
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$
При разложении cos получаются чётные числа, а при разложении sin – нечётные. Удивительно!
Там, где показатель степени – нечётное число, i остаётся, а там, где чётная степень, исчезает, да?
$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots$
$i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots\right)$
Подожди удивляться. Посмотри и сравни с рядом Маклорена для функции e^{ix}.
$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots\right)$
Тык
А! Неужели...
$\cos x$ и $\sin x$ входят в этот ряд?!
Именно! Вот что получается:
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$
Скрип
Вот мы и пришли к формуле Эйлера!
Получается, что с помощью мнимой единицы можно связать функцию e^{ix} и тригонометрические функции, да?!
Мнимое число
e^{ix}
Тригонометрические функции
ТАДАМ!
Кажется, я что-то понял!

Ч. ФОРМУЛА МУАВРА







$(e^{ix})^n = e^{inx}$ *свойство степени*

ТЕПЕРЬ ВСПОМНИ СВОЙСТВА ВОЗВЕДЕНИЯ В СТЕПЕНЬ

$$(e^{ix})^n = (\cos x + i\sin x)^n$$

$$= e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

АГА, ВОТ ТАК ПОЛУЧАЕТСЯ, ДА?

ОТЛИЧНАЯ РАБОТА! ИЗ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА ФОРМУЛА МУАВРА ВЫВОДИТСЯ ОЧЕНЬ ЛЕГКО, НЕ ТАК ЛИ?

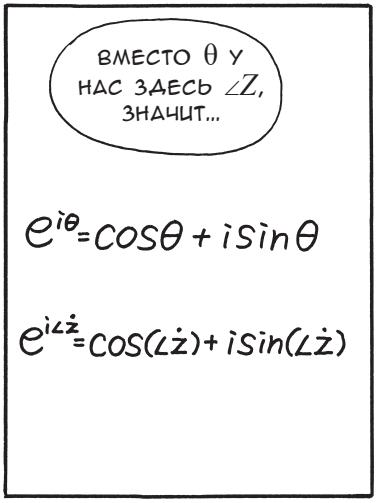
5. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА





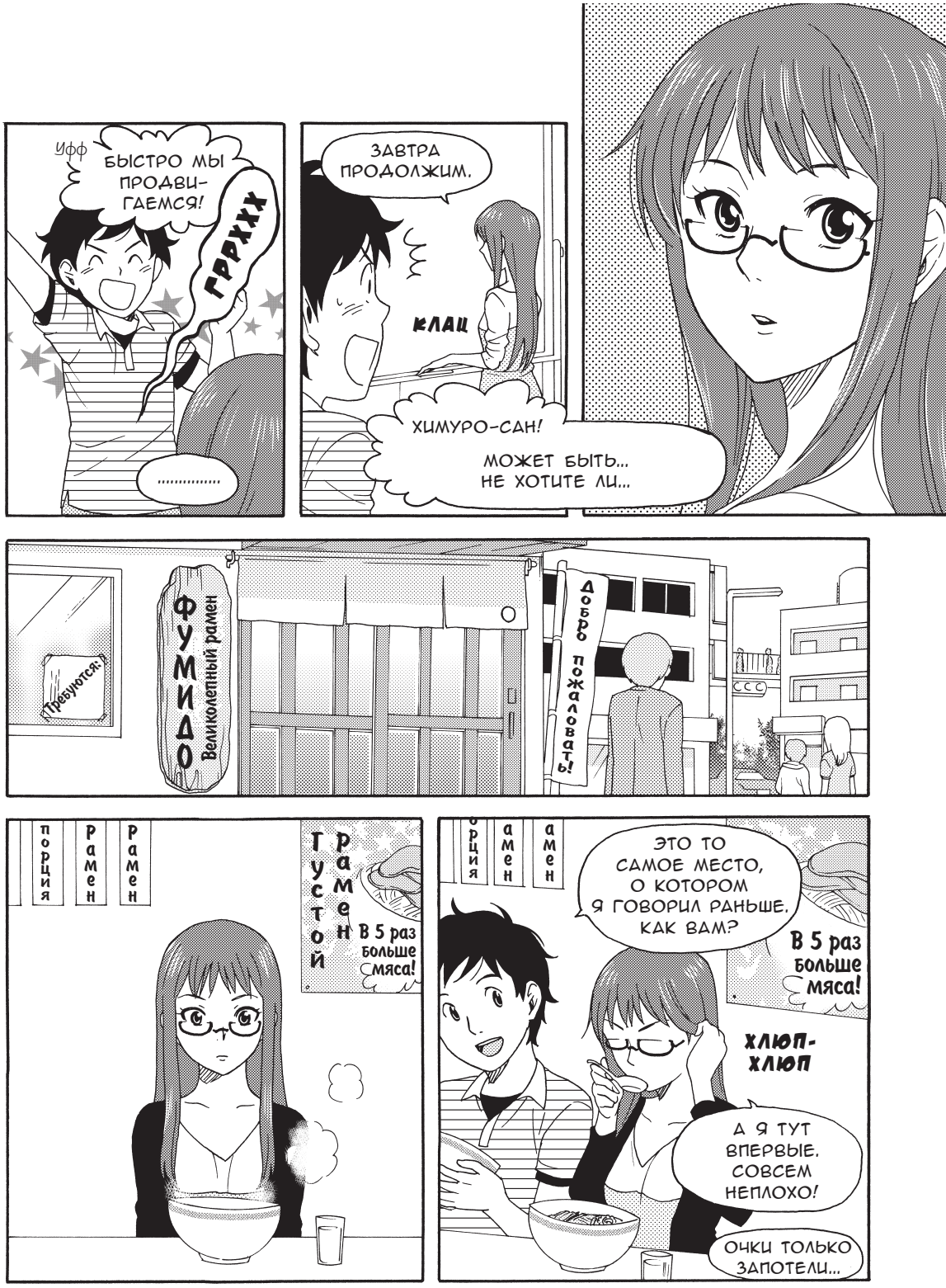
$$Z=a+ib=|Z|\cos(\angle z)+i|Z|\sin(\angle z)=|Z|\{\cos(\angle z)+i\sin(\angle z)\}$$

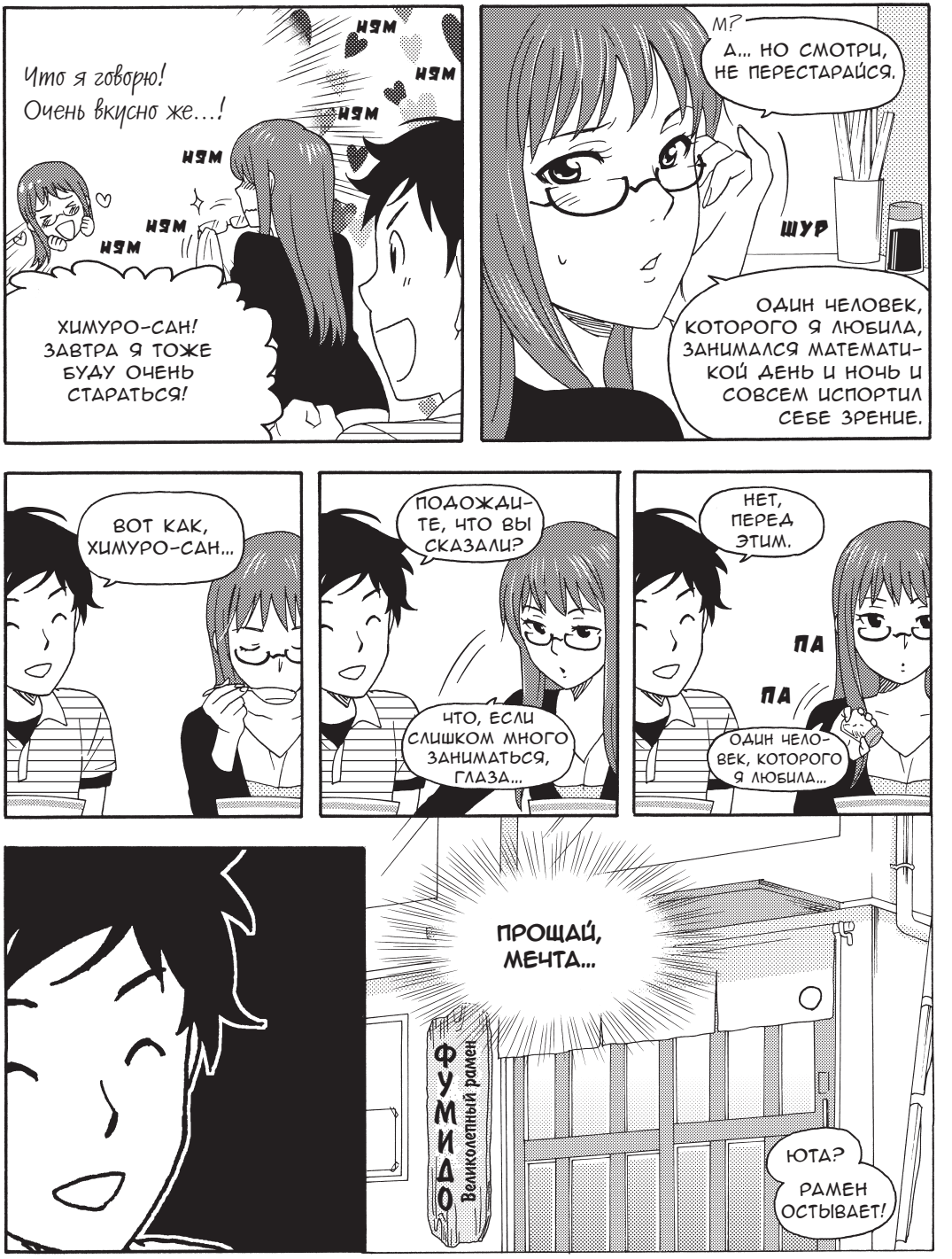
А ТЕПЕРЬ, ИСПОЛЬЗУЯ ФОРМУЛУ ЭЙЛЕРА, СДЕЛАЙ ЗАМЕНУ ВЫРАЖЕНИЯ: $\cos(\angle Z) + i\cdot\sin(\angle Z)$.








Уфф
БЫСТРО МЫ ПРОДВИГАЕМСЯ!
ГРРХХХ
.....
ЗАВТРА ПРОДОЛЖИМ.
КЛАЦ
ХИМУРО-САН!
МОЖЕТ БЫТЬ... НЕ ХОТИТЕ ЛИ...
Требуются:
ФУМИДО
Великолепный рамен
Добро пожаловать!
порция
Рамен
Рамен
Густой Рамен
В 5 раз больше мяса!
порция
амен
амен
ЭТО ТО САМОЕ МЕСТО, О КОТОРОМ Я ГОВОРИЛ РАНЬШЕ. КАК ВАМ?
В 5 раз больше мяса!
ХЛЮП-ХЛЮП
А Я ТУТ ВПЕРВЫЕ. СОВСЕМ НЕПЛОХО!
ОЧКИ ТОЛЬКО ЗАПОТЕЛИ...


Что я говорю! Очень вкусно же...!
НЯМ
НЯМ
НЯМ
НЯМ
НЯМ
НЯМ
ХИМУРО-САН! ЗАВТРА Я ТОЖЕ БУДУ ОЧЕНЬ СТАРАТЬСЯ!
М?
А... НО СМОТРИ, НЕ ПЕРЕСТАРАЙСЯ.
ШУР
ОДИН ЧЕЛОВЕК, КОТОРОГО Я ЛЮБИЛА, ЗАНИМАЛСЯ МАТЕМАТИКОЙ ДЕНЬ И НОЧЬ И СОВСЕМ ИСПОРТИЛ СЕБЕ ЗРЕНИЕ.
ВОТ КАК, ХИМУРО-САН...
ПОДОЖДИТЕ, ЧТО ВЫ СКАЗАЛИ?
ЧТО, ЕСЛИ СЛИШКОМ МНОГО ЗАНИМАТЬСЯ, ГЛАЗА...
НЕТ, ПЕРЕД ЭТИМ.
ПА
ПА
ОДИН ЧЕЛОВЕК, КОТОРОГО Я ЛЮБИЛА...
ПРОЩАЙ, МЕЧТА...
ФУМИДО
Великолепный рамен
ЮТА?
РАМЕН ОСТЫВАЕТ!

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ e^x

Число Непера (число Эйлера) – это $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Обозначим $h = 1/n$, тогда $n = 1/h$, а раз $n \to \infty$, значит, $h \to 0$.

Перепишем нашу формулу как $e = \lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$.

А теперь, используя это, продифференцируем функцию e^x.
Производная функции $f(x)$ по определению вычисляется как

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Теперь подставим в эту формулу $f(x) = e^x$ и вот что получим (так как e^x не зависит от h, то e^x можно вынести за знак предела lim):

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x)' \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{(x+h)}-e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} \\ &= e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}. \end{aligned}$$

А теперь в обеих частях преобразованной формулы

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

возьмём натуральный логарифм, то есть логарифм с основанием e (подробнее про логарифмические функции будет на стр. 159).

$$\log_e e = 1$$
$$= \log_e \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$
$$= \lim_{h\to 0} \log_e (1+h)^{\frac{1}{h}}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_e (1+h)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log_e (1+h)}{h}.$$

Другими словами, получили $\lim_{h\to 0} \frac{\log_e (1+h)}{h} = 1.$

Теперь сделаем следующую подстановку: $1 + h = e^t$, то есть $h = e^t - 1$.

И раз $h \to 0$, а $e^0 = 1$, то и $t \to 0$.

Подставив это в формулу $\lim_{h\to 0} \frac{\log_e (1+h)}{h} = 1$,

получаем

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log_e (e^t)}{e^t - 1} = 1$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t \log_e (e)}{e^t - 1} = 1 \quad \log_e e = 1, \text{ поэтому } \lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1.$$

Так как предел равен 1, поменяем местами числитель и знаменатель:

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

В результате имеем

$$f'(x) = (e^x)'$$
$$= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$
$$= e^x.$$

То есть после дифференцирования мы получили исходную функцию.

7. ПРИМЕР ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЧИСЛА e

Предположим, что в банк было положено на хранение 10 млн иен. Годовой процент по вкладу равен 3%. Какая сумма в этом случае будет на банковском счету через год?

Ответ: $10\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}03) = 10$ млн 300 тыс. иен.

А если полученную сумму – 10 млн 300 тыс. иен – мы оставляем в банке ещё на 1 год, сколько получим в конце второго года? Поскольку полученную прибыль мы прибавляем к исходной сумме, то со второго года будут рассчитываться уже сложные проценты.

Ответ: $10\,300\,000 \cdot (1 + 0{,}03) = 10\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}03) \cdot (1 + 0{,}03) =$
$= 10\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}03)^2 = 10\,609\,000$ иен.

А если оставим деньги в банке ещё на 1 год, то что получим по истечении 3 лет?

Ответ: $10\,609\,000 \cdot (1 + 0{,}03) = 10\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}03)^2 \cdot (1 + 0{,}03) =$
$= 10\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}03)^3 = 10\,927\,270$ иен.

Что же получится через N лет?

Ответ: $10\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}03)^N$ иен.
Если речь идёт о 10 годах, то $N = 10$, и ответ будет: 13 439 163 иен.

А теперь, например, вы так договорились с банком, что банк будет начислять проценты каждые полгода. Процент, получаемый за полгода, будет равен 1,5%, но начисляться будет два раза в год. В этом случае, используя сложные проценты, через год получим

$10\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}03/2) \cdot (1 + 0{,}03/2) = 10\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}03/2)^2 =$
$= 10\,302\,250$ иен.

Через 2 года получим: $10\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}03/2)^4 = 10\,613\,635$ иен.

Через 3 года получим: $10\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}03/2)^6 = 10\,934\,432$ иен.

Через N лет получим: $10\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}03/2)^{2N}$.

Если же взять, для примера, 10 лет, то при $N = 10$ получим 13 468 550 иен. По сравнению с суммой, начисляемой раз в год, доход немного увеличился.

Теперь посмотрим, что получится, если установить начисления каждые 3 месяца, то есть 4 раза в год. Каждый раз начисляться будет 1/4 от годового процента. Используя сложные проценты, получим

Через год: $10\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}03/4)^4 = 10\,303\,391$ иена.
Через 2 года: $10\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}03/4)^8 = 10\,615\,988$ иен.
Через 3 года: $10\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}03/4)^{12} = 10\,938\,068$ иен.
Через N лет: $10\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}03/4)^{4N}$ иен.
Через 10 лет: 13 483 486 иен.

Опять же видим, что прибыль немного увеличилась.
Полученные результаты представлены в таблице.

	Сколько раз в год начисляется процент	Через 1 год (иен)	Через 2 года (иен)	Через 3 года (иен)	Через 10 лет (иен)
Годовой процент (3%)	1	10 300 000	10 609 00	10 927 270	13 439 163
Полугодовой процент (1,5%)	2	10 302 250	10 613 635	10 934 432	13 468 550
Квартальный процент (3/4%)	4	10 303 391	10 615 988	10 938 068	13 483 486

Получается, чем короче период начисления процентов, тем выше получаемая прибыль.

Что же получается, если период начисления прибыли стремится к бесконечно малому, то сумма прибыли будет стремиться к бесконечно большой? Нет, в реальном мире не всё так радужно. Если период начисления стремится к бесконечно малому, то сумма прибыли будет стремиться к конкретному значению. Вычислим это значение. Для этого в предыдущем примере уберем стартовую сумму в 10 млн иен и рассмотрим только $(1 + 0{,}03/n)^{nN}$, где n стремится к бесконечности.

Сделаем такое преобразование:

$$\left(1+\frac{0.03}{n}\right)^{nN}=\left(1+\frac{0.03}{n}\right)^{\frac{n}{0.03}0.03N}.$$

Введём замену $\frac{0.03}{n}=\frac{1}{h}$, а значит, $\frac{n}{0.03}=h$.

И ещё заменим $0{,}03N = T$, а значит, получим $\left(1+\frac{1}{h}\right)^{hT}$.

Так как $n = 0{,}03h$, то если n бесконечно большое, то и h бесконечно большое. Вспомните ранее рассмотренный пример для n, стремящегося к бесконечности, где было

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

В нынешнем примере к бесконечности стремится h:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

А значит, вот что получится:

$$\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{hT}=\left\{\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h}\right\}^{T}=e^{T}.$$

Таким образом, основание натурального логарифма (число e) может использоваться при вычислении суммы прибыли, получаемой при условии, что период начисления бесконечно мал. Однако надо признать, что в реальном мире банки не начисляют проценты в бесконечно малые периоды.

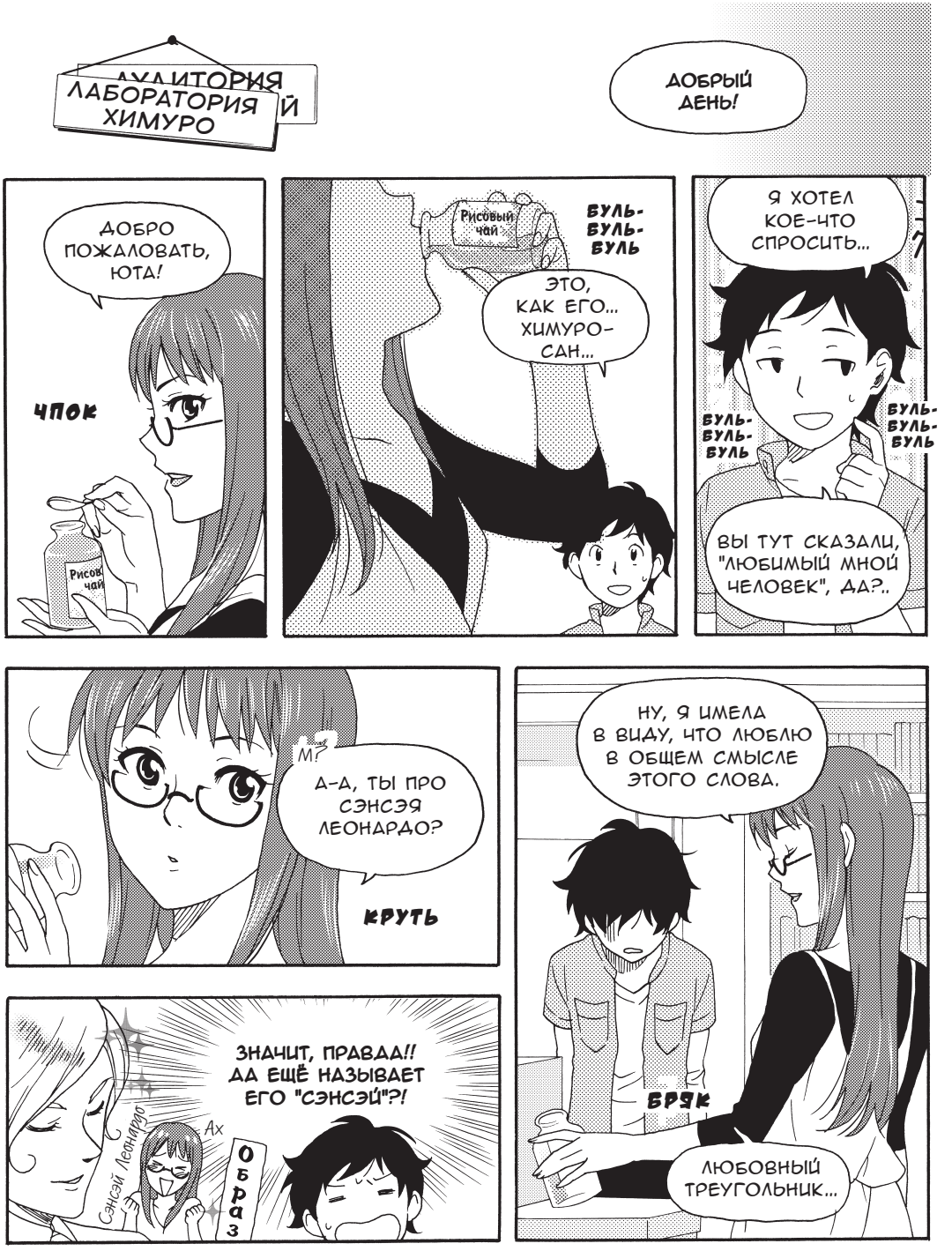
Глава

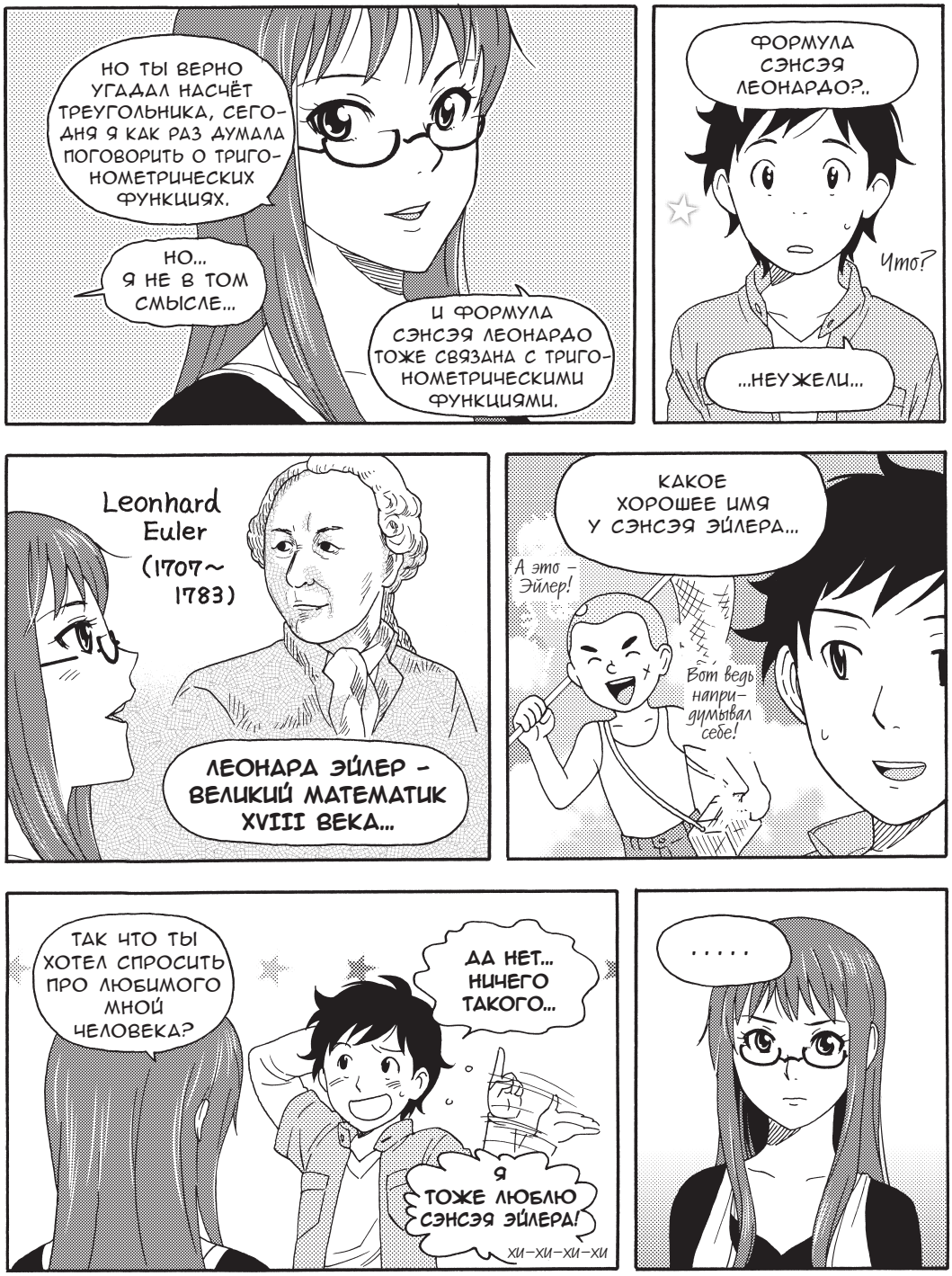
5

ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ


Вот как...
ЗНАЧИТ, ЭТО ПРАВДА...
ХОДИЛИ СЛУХИ, ЧТО КОРОЛЕВА МАТЕМАТИКИ ВЛЮБЛЕНА В КОГО-ТО БЕЗОТВЕТНО.
ЧПОК
ЧПОК
КАЖЕТСЯ, ЕЁ ВОЗЛЮБЛЕННОГО ЗОВУТ ТО ЛИ ЛЕОНАРДО, ТО ЛИ ЕЩЁ КАК-ТО ТАК. ИНОСТРАННОЕ ИМЯ, В ОБЩЕМ.
Образ
ДАЖЕ ИМЯ КЛАССНОЕ...
ЕСЛИ ТЫ ЗНАЛ, ПОЧЕМУ ТЫ МНЕ РАНЬШЕ НЕ СКАЗАЛ?! ТАКУЮ ВАЖНУЮ ВЕЩЬ!
БАЦ
ХРЯСЬ
Я ДУМАЛ, ЭТИ СПЛЕТНИ ПРОСТО ЧЬЯ-ТО ДУРАЦКАЯ ШУТКА.
А ГЛАВНОЕ, ОН, КАЖЕТСЯ, ПРЯМО ГЕНИЙ МАТЕМАТИКИ.
Образ
Справочник по высшей математике
НЕ ТО ЧТО Я...
ТЫ ЧТО, ДУРАК!
СОБИРАЕШЬСЯ ТАК ВОТ ПРОСТО СДАТЬСЯ?!
СЕНПАЙ...


ХОТЯ, БУДЬ Я НА ТВОЁМ МЕСТЕ, СДАЛСЯ БЫ.
ЧЁРТ
...МНЕ ПОРА
БАЦ
ТЫ ЧТО, РАССЕРДИЛСЯ? ДАВАЙ УГОЩУ ТЕБЯ ОБЕДОМ.
НЕТ, У МЕНЯ УРОК С ХИМУРО-САН.
Бумажный мусор
ВСЁ РАВНО ПОЙДЁШЬ, ХОТЯ ШАНСОВ УЖЕ НЕТ?
МОЖЕТ, ШАНСОВ И НЕТ,
НО, ЗАЙДЯ ТАК ДАЛЕКО, Я ТЕПЕРЬ УЖЕ НЕ ХОЧУ БРОСАТЬ ЗАНЯТИЯ ПРО КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.
А ТЫ С ХАРАКТЕРОМ!
В прошлом
Рисовый чай!
Молодец!
НЕ МОГУ БОЛЬШЕ МУЧИТЬСЯ НЕИЗВЕСТНОСТЬЮ...
ВОЗЬМУ, И ПРЯМО СПРОШУ У ХИМУРО-САН!

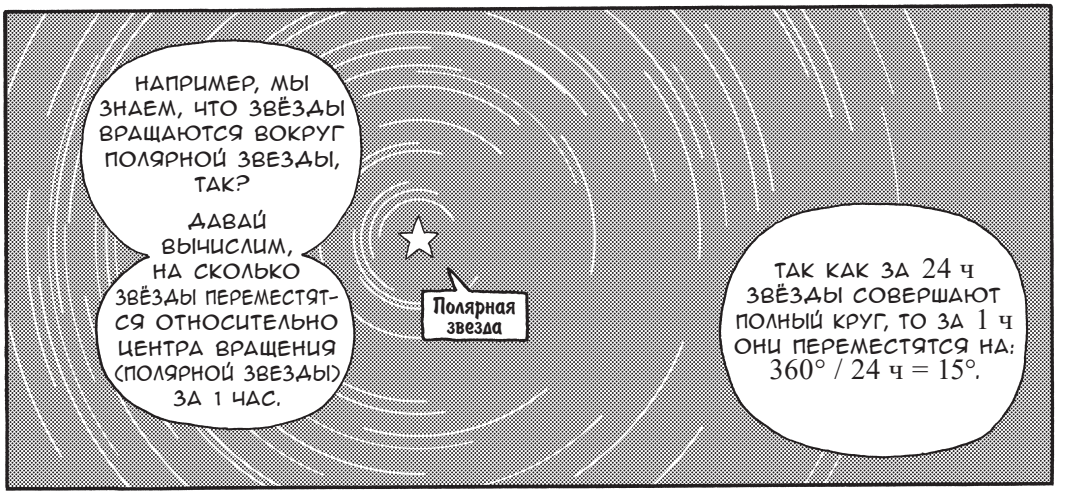

ЛАБОРАТОРИЯ ХИМУРО
ДОБРЫЙ ДЕНЬ!
ДОБРО ПОЖАЛОВАТЬ, ЮТА!
ЧПОК
Рисовый чай
Рисовый чай
БУЛЬ-БУЛЬ-БУЛЬ
ЭТО, КАК ЕГО... ХИМУРО-САН...
Я ХОТЕЛ КОЕ-ЧТО СПРОСИТЬ...
БУЛЬ-БУЛЬ-БУЛЬ
БУЛЬ-БУЛЬ-БУЛЬ
ВЫ ТУТ СКАЗАЛИ, "ЛЮБИМЫЙ МНОЙ ЧЕЛОВЕК", ДА?..
М?
А-А, ТЫ ПРО СЭНСЭЯ ЛЕОНАРДО?
КРУТЬ
НУ, Я ИМЕЛА В ВИДУ, ЧТО ЛЮБЛЮ В ОБЩЕМ СМЫСЛЕ ЭТОГО СЛОВА.
БРЯК
ЛЮБОВНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК...
ЗНАЧИТ, ПРАВДА!! ДА ЕЩЁ НАЗЫВАЕТ ЕГО "СЭНСЭЙ"?!
Сэнсэй Леонардо
Ах
Образ

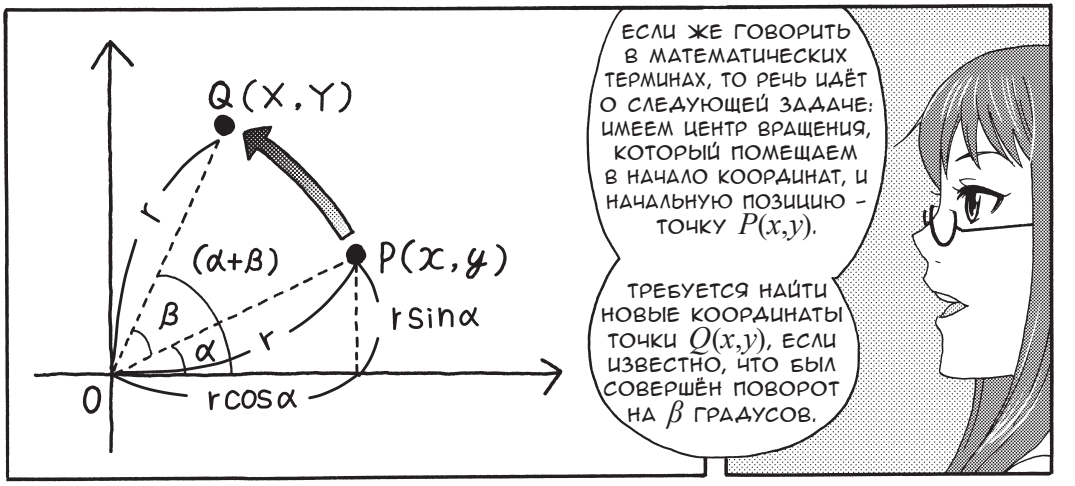

НО ТЫ ВЕРНО УГАДАЛ НАСЧЁТ ТРЕУГОЛЬНИКА, СЕГОДНЯ Я КАК РАЗ ДУМАЛА ПОГОВОРИТЬ О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ.
НО... Я НЕ В ТОМ СМЫСЛЕ...
И ФОРМУЛА СЭНСЭЯ ЛЕОНАРДО ТОЖЕ СВЯЗАНА С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ.
ФОРМУЛА СЭНСЭЯ ЛЕОНАРДО?..
Что?
...НЕУЖЕЛИ...
Leonhard Euler (1707~1783)
ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР – ВЕЛИКИЙ МАТЕМАТИК XVIII ВЕКА...
КАКОЕ ХОРОШЕЕ ИМЯ У СЭНСЭЯ ЭЙЛЕРА...
А это – Эйлер!
Вот ведь напридумывал себе!
ТАК ЧТО ТЫ ХОТЕЛ СПРОСИТЬ ПРО ЛЮБИМОГО МНОЙ ЧЕЛОВЕКА?
ДА НЕТ... НИЧЕГО ТАКОГО...
Я ТОЖЕ ЛЮБЛЮ СЭНСЭЯ ЭЙЛЕРА!
ХИ-ХИ-ХИ-ХИ
.....

1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ











$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\sin\alpha$$
$$X = r\cos(\alpha+\beta) \qquad Y = r\sin(\alpha+\beta)$$

ТАК ПРАВИЛЬНО?





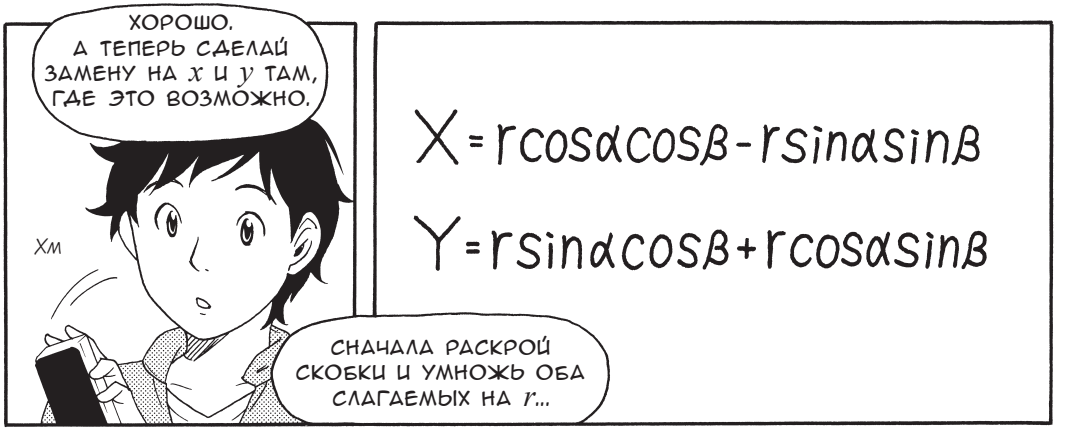
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

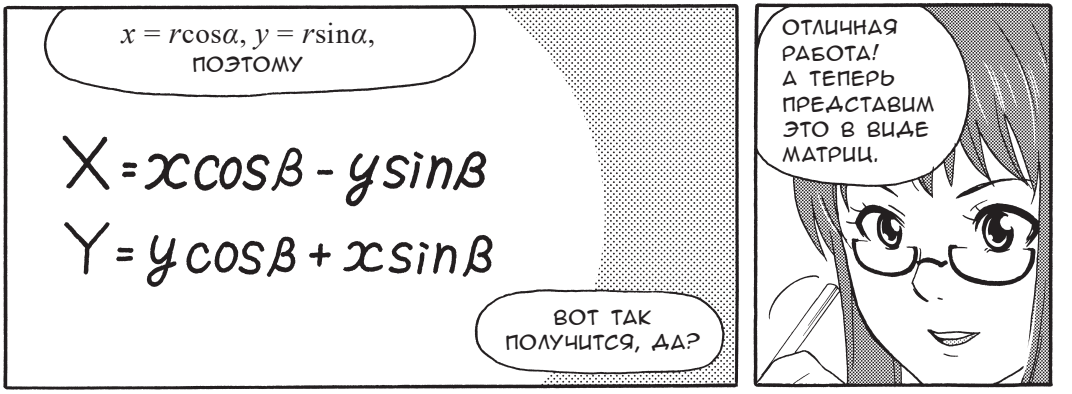
ВОТ ЭТО И ЕСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ.
Я ПОКАЖУ НЕМНОГО ПОГОДЯ, КАК ИХ ВЫВЕСТИ.



$$X = r(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$
$$Y = r(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

ПОЛУЧИЛОСЬ!


ХОРОШО. А ТЕПЕРЬ СДЕЛАЙ ЗАМЕНУ НА x И y ТАМ, ГДЕ ЭТО ВОЗМОЖНО.
Хм
$X = r\cos\alpha\cos\beta - r\sin\alpha\sin\beta$
$Y = r\sin\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\sin\beta$
СНАЧАЛА РАСКРОЙ СКОБКИ И УМНОЖЬ ОБА СЛАГАЕМЫХ НА r...


$x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, ПОЭТОМУ
$X = x\cos\beta - y\sin\beta$
$Y = y\cos\beta + x\sin\beta$
ВОТ ТАК ПОЛУЧИТСЯ, ДА?
ОТЛИЧНАЯ РАБОТА! А ТЕПЕРЬ ПРЕДСТАВИМ ЭТО В ВИДЕ МАТРИЦ.


ВОТ ЭТО НАЗЫВАЕТСЯ МАТРИЦЕЙ ПОВОРОТА (ТОЛЬКО ТУТ β ЗАМЕНИЛИ НА θ).
ЕСЛИ УМНОЖИТЬ ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ ТОЧКИ НА МАТРИЦУ ПОВОРОТА, ТО НАЙДЁМ КООРДИНАТЫ ТОЧКИ ПОСЛЕ ПОВОРОТА.
$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
ЭТОТ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ КООРДИНАТ ТОЧКИ ПОСЛЕ ПОВОРОТА КАЖЕТСЯ ИНТЕРЕСНЕЕ, ЧЕМ ЧЕРЕЗ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ СУММЫ.
И МЕЖДУ ПРОЧИМ, С ПОМОЩЬЮ МАТРИЦЫ ПОВОРОТА ЛЕГКО МОЖНО ВЫВЕСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СУММЫ ДВУХ УГЛОВ.

Как думаешь, что получится, если поворот совершён на $(\alpha \cdot \beta)$ градусов?

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

То есть заменяем θ на $(\alpha \cdot \beta)$. Так будет, да?

А теперь представь ситуацию, что сначала поворот был совершён на $\alpha°$, а затем ещё на $\beta°$. Что получим в этом случае?

Чур я первая!

Тогда надо, что ли, два раза использовать матрицу поворота?

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times a+2\times c & 1\times b\times 2\times d \\ 3\times a+4\times c & 3\times b+4\times d \end{bmatrix}$$

Как перемножать матрицы, ты помнишь?

По отдельности нужно вычислить каждый элемент матрицы...

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix}$$

Вот и получили тригонометрические формулы сложения.

И, исходя из правила перемножения матриц, сравнив одинаковые элементы матриц слева и справа, мы и получим тригонометрические формулы для суммы двух углов.

2. ВЫВЕДЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ СЛОЖЕНИЯ



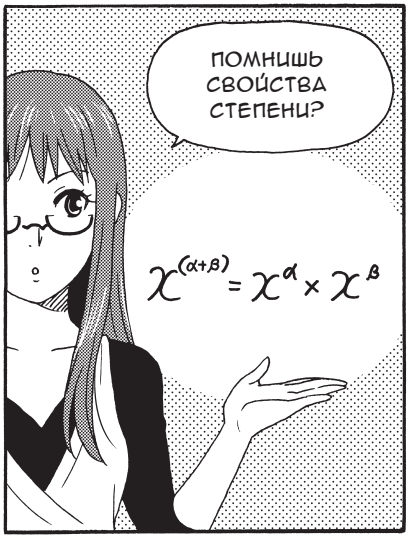


СДЕЛАЕМ ЗАМЕНУ $\theta = \alpha + \beta$.

И ПРЕЖДЕ ВСЕГО ОБРАТИМ ВНИМАНИЕ НА ЛЕВУЮ ЧАСТЬ ФОРМУЛЫ – $e^{i(\alpha+\beta)}$.

$e^{i(\alpha+\beta)}=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$

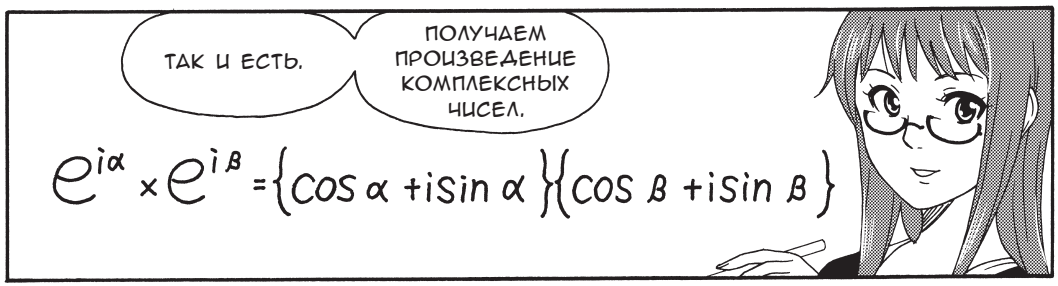
СКРИП

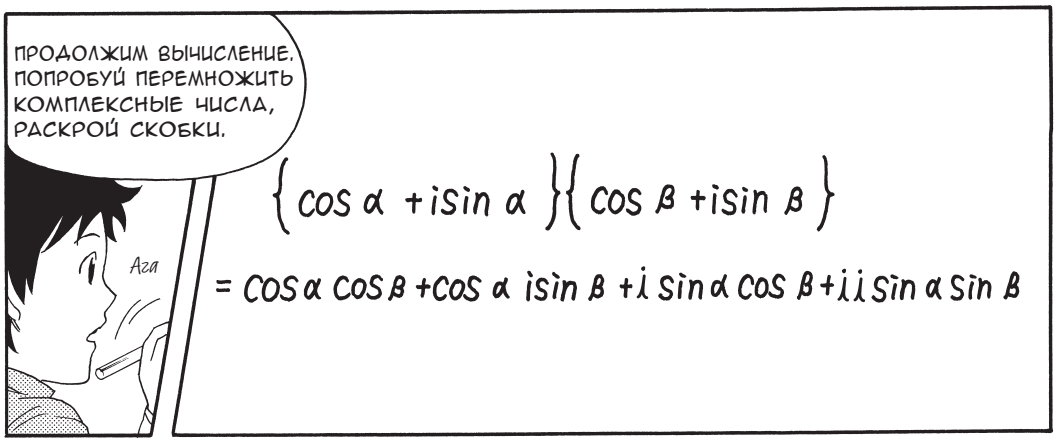




$$n^{(2+3)} = n \times n \times n \times n \times n = (n \times n) \times (n \times n \times n) = n^2 \times n^3$$





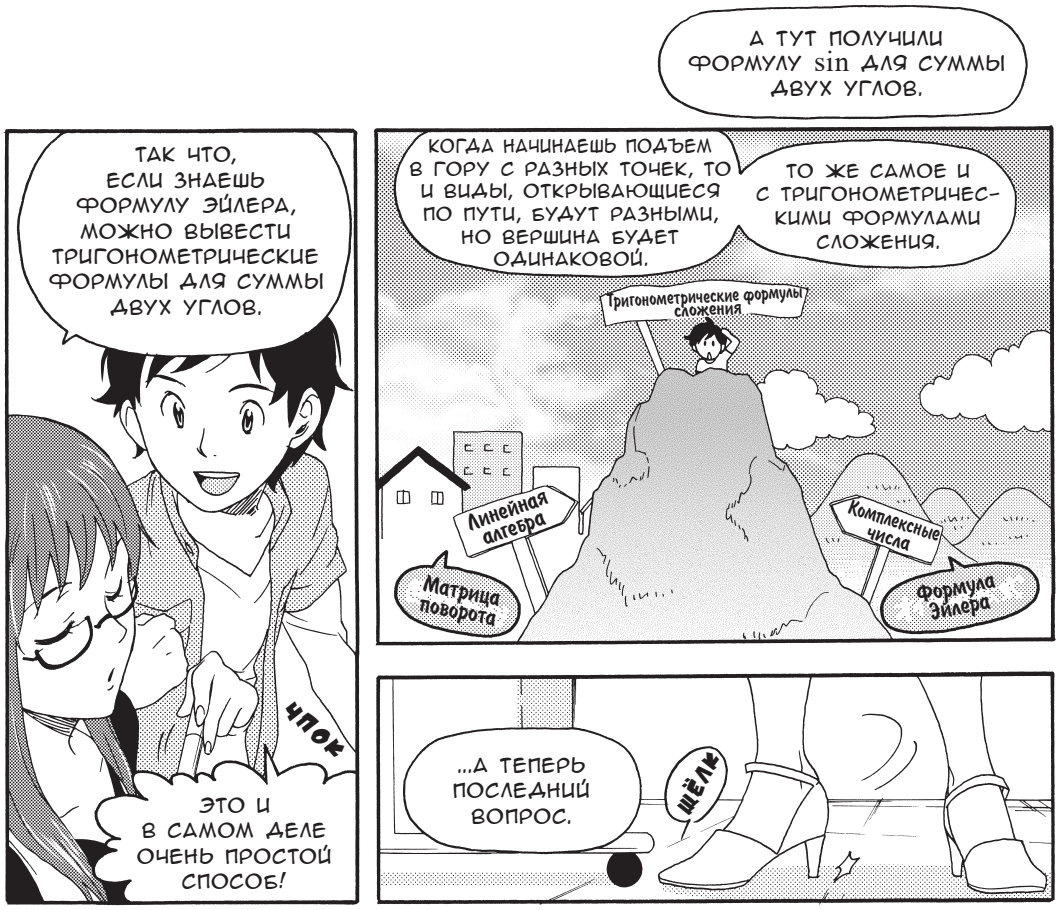



И ЕЩЁ ОДИН ШАГ. ВСПОМНИ, ЧТО ii – ЭТО i^2, КОТОРЫЙ РАВЕН -1.
СДЕЛАЙ ЗАМЕНУ И РАЗДЕЛИ ВЕЩЕСТВЕННУЮ И МНИМУЮ ЧАСТИ.
АГА, ВОТ ТАК.
$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i\{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\}$
А ТЕПЕРЬ СОЕДИНИМ С ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ФОРМУЛОЙ.
НИЧЕГО НЕ ЗАМЕЧАЕШЬ?
$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$
$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i\{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\}$
Ой! НА МЕСТЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ И МНИМОЙ ЧАСТЕЙ ОКАЗАЛИСЬ ФОРМУЛЫ, ПОХОЖИЕ НА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ!
ТАК КАК ДВА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛА СОЕДИНЕНЫ ЗНАКОМ РАВНО, ЗНАЧИТ, И ИХ ВЕЩЕСТВЕННАЯ И МНИМАЯ ЧАСТИ ДОЛЖНЫ БЫТЬ РАВНЫ В ПРАВОЙ И ЛЕВОЙ ЧАСТЯХ ФОРМУЛЫ, ВЕРНО?
СРАВНИМ СПЕРВА ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧАСТИ...

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$



$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$




У ТЕБЯ ЕСТЬ ЛЮБИМЫЙ ЧЕЛОВЕК?
Презентация
Лекция по математике
Мнимая единица
Открытый семинар
чай
ЧТО!?!
ЧЕГО ЭТО ВДРУГ?!
ТУК-ТУК
А?!
НЕ ТАК ЧТОБЫ МНЕ ЭТО БЫЛО ИНТЕРЕСНО, НО ТЫ ЖЕ МЕНЯ СЕГОДНЯ СПРОСИЛ, НЕ ТАК ЛИ?
ТУК-ТУК
ТУК-ТУК
МОЖЕТ... ЭТО ШАНС ДЛЯ ПРИЗНАНИЯ?!
НО КАК-ТО Я ПОКА НЕ ГОТОВ...
ЭЭЭ...
ПОЖАЛУЙ, МОЖНО СКАЗАТЬ И ТАК...
АХ, ТАК? ЧТО Ж, ПРЕКРАСНО.
А?
НУ, НА СЕГОДНЯ ВСЁ.
ХИМУРО-САН?..
ХЛОП
ПОЧЕМУ ЖЕ Я ТАК РАЗДРАЖЕНА...
?
?
Опять я что-то не то сделал?..

3. УПРАЖНЕНИЯ

Решите уравнение $x^3 = 1$. Учтите, что это уравнение третьей степени и у него должно быть три корня.

Решение

Перенесём 1 в левую часть уравнения. Получаем: $x^3 - 1 = 0$.

Понятно, что $x = 1$ является решением. А теперь разделим $x^3 - 1$ на $x - 1$.

Осуществим деление $(x^3 - 1)/(x - 1)$ как в показано ниже. Цифры ❶ – ❾ добавлены для объяснений ниже и к самому процессу деления не имеют отношения.

$$
\begin{array}{rl}
 & \text{❶ ❹ ❼} \\
 & x^2 + x + 1 \\
\hline
x - 1 & x^3 + 0x^2 + 0x - 1 \\
 & x^3 - x^2 \quad \cdots\cdots \text{❷} \\
\hline
 & x^2 + 0x \quad \cdots\cdots \text{❸} \\
 & x^2 - x \quad \cdots\cdots \text{❺} \\
\hline
 & x - 1 \quad \cdots\cdots \text{❻} \\
 & x - 1 \quad \cdots\cdots \text{❽} \\
\hline
 & 0 \quad \cdots\cdots \text{❾}
\end{array}
$$

Прежде всего представим делимую функцию как $x^3 - 1 = x^3 + 0x^2 + 0x - 1$, а делитель $(x - 1)$ запишем сверху в указанном месте.

❶ Делим первый элемент делимого x^3 на старший элемент делителя $(x - 1)$ и в частное помещаем результат x^2.

❷ Умножаем делитель $(x - 1)$ на x^2 и результат $(x^3 - x^2)$ пишем под $(x^3 + 0x^2)$.

❸ Из $(x^3 + 0x^2)$ вычитаем $(x^3 - x^2)$. Результат x^2 пишем внизу в соответствующем столбце. И дописываем следующую часть делимого $(0x)$.

❹ Делим $(x^2 - 0x)$ на $(x - 1)$, результат x дописываем в частное сверху.

❺ Умножаем $(x - 1)$ на x и результат $(x^2 - x)$ пишем под $(x^2 - 0x)$.

❻ Из $(x^2 - 0x)$ вычитаем $(x^2 - x)$ и результат x записываем под соответствующим столбцом, затем добавляем к нему следующий элемент делимого –1.

❼ Делим $(x - 1)$ на $(x - 1)$, результат 1 добавляем к частному.

❽ Умножаем $(x - 1)$ на 1 и результат $(x - 1)$ пишем под $(x - 1)$.

❾ Из $(x - 1)$ вычитаем $(x - 1)$ и результат 0 пишем внизу.

Теперь, используя формулу
$(x-a)(x^2+ax+a2)=x^3+ax^2+a^2x-ax^2-a^2x-a^3=x^3-a^3$,
сделаем разложение на множители и получим
$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$.

А теперь по общей формуле корней квадратного уравнения найдём решения для множителя $x^2+x+1=0$:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

Итак, в ответе три корня: $x=1\quad\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

А теперь решим это же уравнение, используя формулу Эйлера:

$$x^3=1=1+i\times0=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi=e^{i2n\pi},$$

где n – любое целое число.

Теперь извлечём кубический корень из обеих частей уравнения (то есть возведём в степень 1/3):

$$(x^3)^{\frac{1}{3}}=\left(e^{i2n\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$x=e^{i\frac{2}{3}n\pi}.$$

❶ Если $n=0$, то:

$$x=e^{i\frac{2}{3}0\pi}=e^{i0}=\cos 0+i\sin 0=1.$$

❷ Если $n=1$, то:

$$x=e^{i\frac{2}{3}\pi}=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

❸ Если $n=2$, то:

$$x=e^{i\frac{2}{3}\times2\pi}=e^{i\frac{4}{3}\pi}=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}.$$

❹ Если $n=3$, то:

$$x=e^{i\frac{2}{3}\times3\pi}=e^{i2\pi}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1.$$

❺ Если $n = 4$, то

$$\begin{aligned} x &= e^{i\frac{2}{3}} \times 4\pi = \\ &= e^{i\frac{8}{3}\pi} = \\ &= e^{i\left(2\pi + \frac{2}{3}\pi\right)} = \\ &= e^{i2\pi} e^{i\frac{2}{3}\pi} = \\ &= (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin 2\pi\right) = \\ &= (1 + i \times 0)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}. \end{aligned}$$

И так далее. Таким образом, получили три ответа: $x = 1,\ x = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Другими словами, если использовать комплексные числа (формулу Эйлера), то решением $x^3 = 1$ будет $x^3 = e^{i\frac{2}{3}n\pi}$, где n – любое целое число.

Кроме того, если для проверки перемножить между собой

$$e^{i\frac{2}{3}\pi} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

и

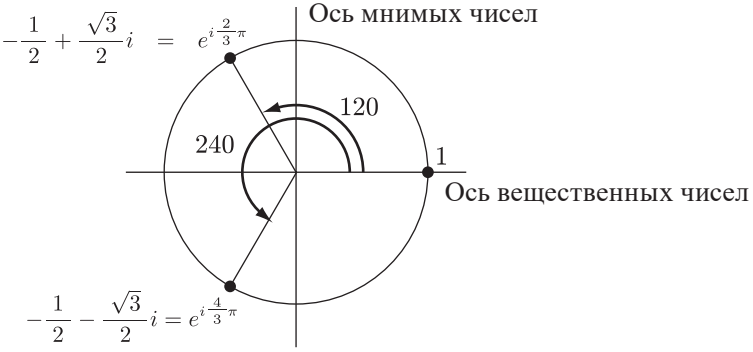
$$\begin{aligned} \left(e^{i\frac{2}{3}\pi}\right)^2 &= e^{i\frac{4}{3}\pi} = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \\ &= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \end{aligned}$$

то получим

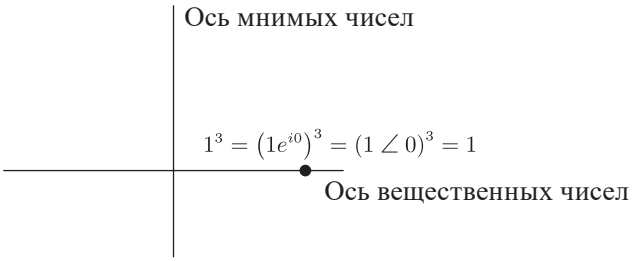
$$
\begin{aligned}
e^{i\frac{2}{3}\pi}\, e^{i\frac{4}{3}\pi} &= e^{i\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\right)} = \\
&= e^{i\frac{6}{3}\pi} = \\
&= e^{i2\pi} = \\
&= \cos 2\pi + i \sin 2\pi = \\
&= 1 + i \times 0 = \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{i\frac{2}{3}\pi}\, e^{i\frac{4}{3}\pi} &= \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) = \\
&= \frac{1+\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-3i^3}{4} = \\
&= \frac{1-(-1)\times 3}{4} = \frac{1+3}{4} = \\
&= \frac{4}{4} = \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

А это значит, что представления в прямоугольных координатах и в полярных координатах эквивалентны. Однако, думаю, вы согласитесь, что решение с помощью формулы Эйлера проще. И напоследок изобразим это на комплексной плоскости:

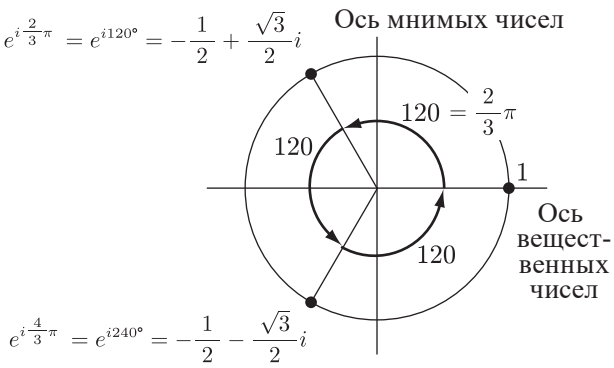


❶ Если $x = 1$, чему равно x^3? Вот что получим:

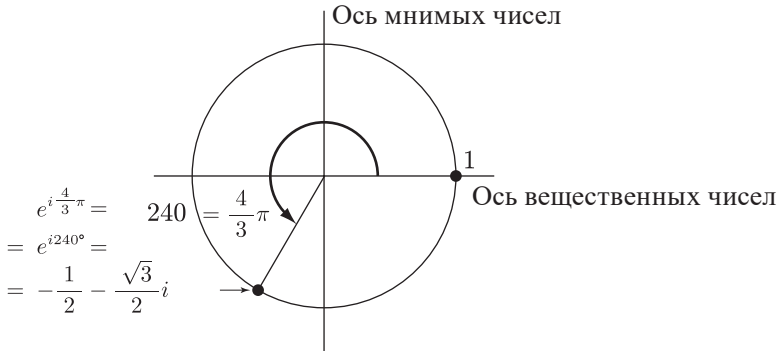


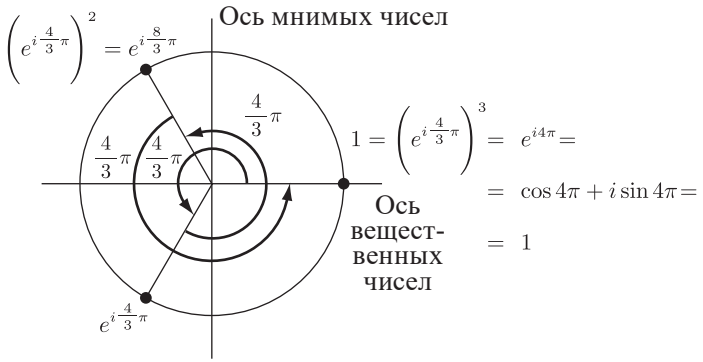
❷ Если $x = e^{i\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, чему равно x^3? Вот что получим:

$$\left(e^{i\frac{2}{3}\pi}\right)^3 =$$
$$= \quad e^{i2\pi} =$$
$$= \quad e^{i360°} =$$
$$= \quad \cos 2\pi + i \sin 2\pi =$$
$$= \quad 1 + i \times 0 =$$
$$= \quad 1.$$

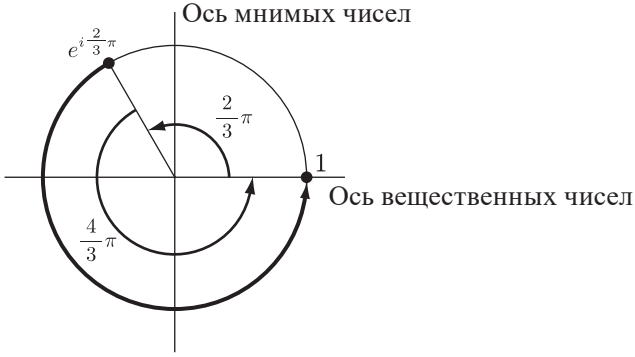


❸ Если $x = e^{i\frac{4}{3}\pi} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, чему равно x^3? Вот что получим:





❹ Изобразим $e^{i\frac{2}{3}\pi} \times e^{i\frac{4}{3}\pi}$ на комплексной плоскости:



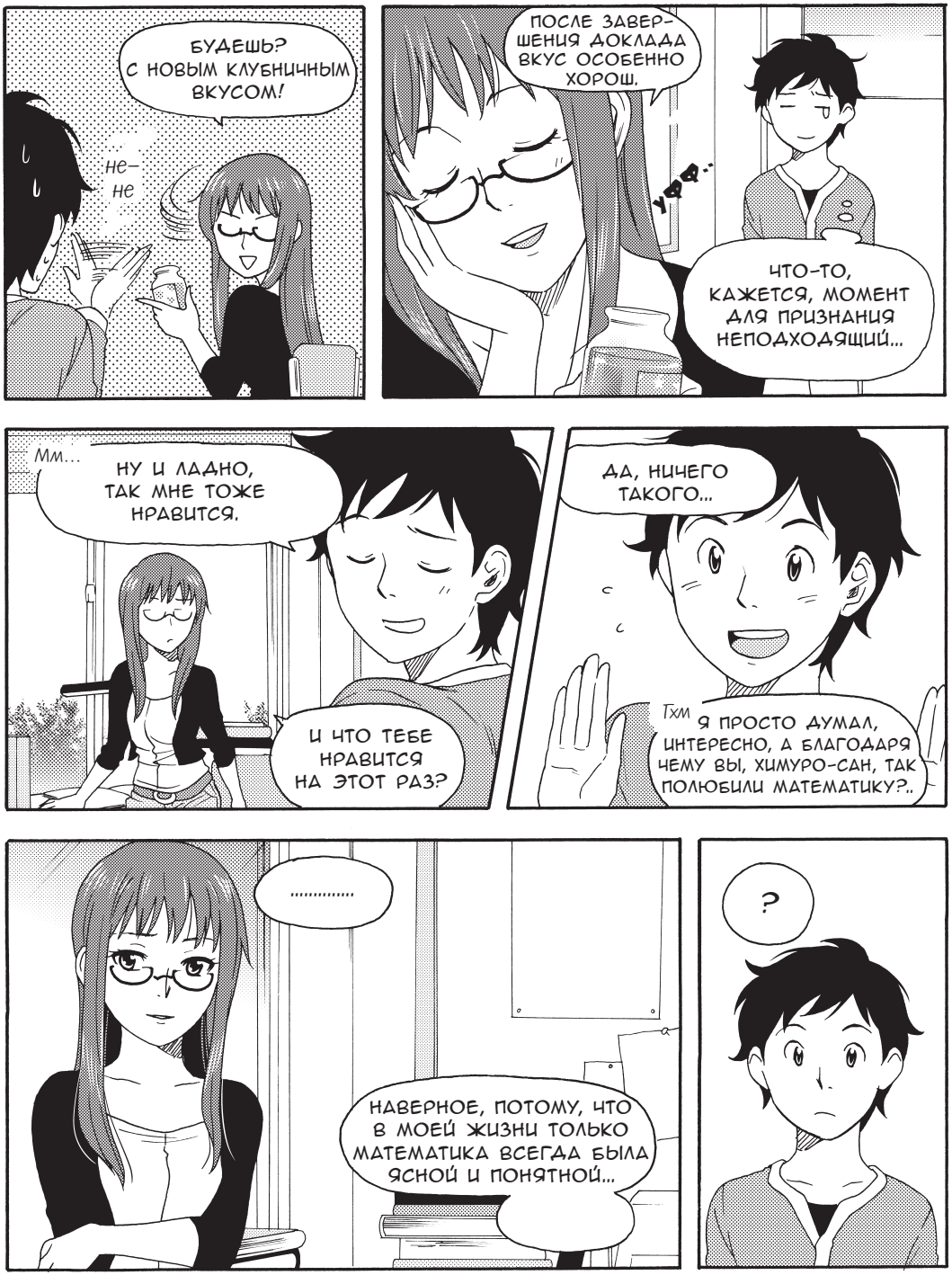
Умножение на $e^{i\frac{4}{3}\pi}$ означает поворот на (4/3)π [rad], а значит, из точки $e^{i\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ попадаем в точку 1 на комплексной плоскости.

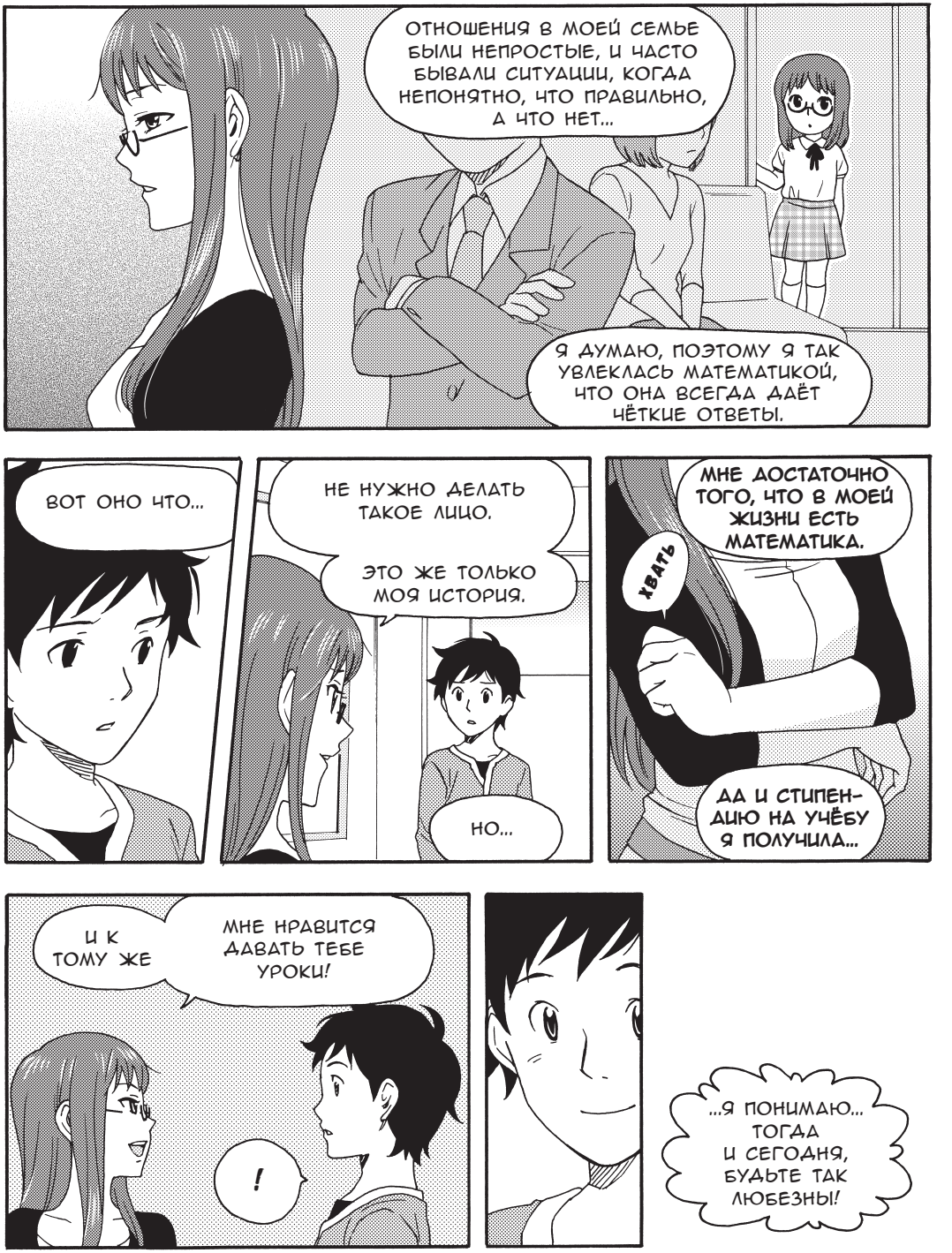
Глава

6

СВОЙСТВА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ


ХИМУРО-САН...
ВЫ ВЧЕРА СПРОСИЛИ, ЕСТЬ ЛИ У МЕНЯ ЛЮБИМЫЙ ЧЕЛОВЕК...
АУДИТОРИЯ
ЛАБОРАТОРИЯ ХИМУРО
НУ ТАК ВОТ...
ЧЕЛОВЕК, КОТОРЫЙ МНЕ НРАВИТСЯ, – ЭТО ВЫ, ХИМУРО-САН!
НЕУЖЕЛИ Я СКАЗАЛ?! Я ЭТО СКАЗАЛ!!
ДА? ЧТО Ж, СПАСИБО.
ШУР-ШУР-ШУР
НУ, ЭТО ПОНЯТНО.
А?
ВЕДЬ ЕСЛИ БЫ ТЫ ИСПЫТЫВАЛ КО МНЕ НЕПРИЯЗНЬ, ТО НЕ СТАЛ БЫ ХОДИТЬ КАЖДЫЙ ДЕНЬ НА ЗАНЯТИЯ.
ЧПОК
НО ВЫ МНЕ НРАВИТЕСЬ НЕ В ЭТОМ СМЫСЛЕ...

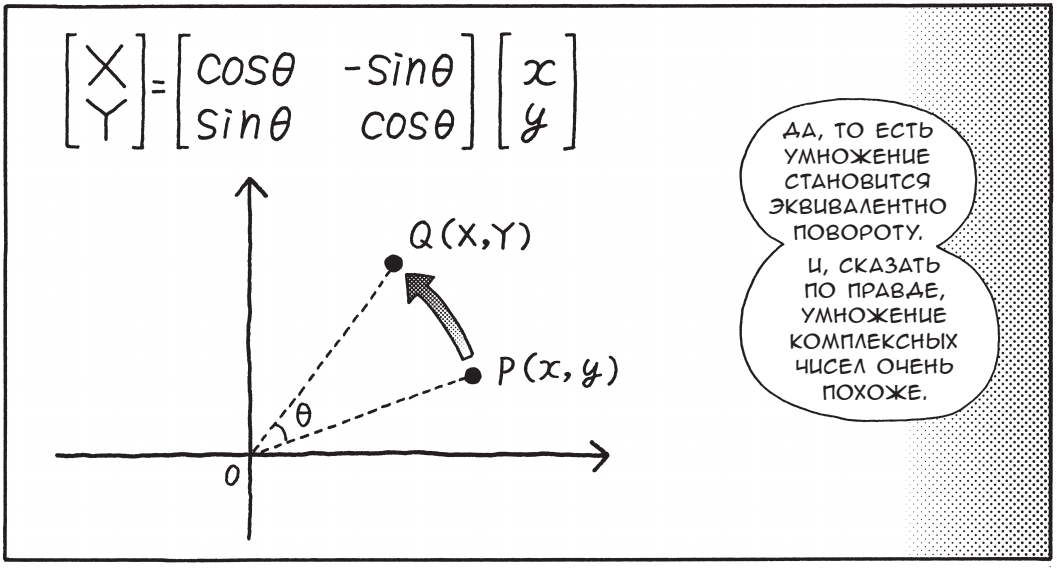

БУДЕШЬ? С НОВЫМ КЛУБНИЧНЫМ ВКУСОМ!
не- не
ПОСЛЕ ЗАВЕРШЕНИЯ ДОКЛАДА ВКУС ОСОБЕННО ХОРОШ.
УФФ
ЧТО-ТО, КАЖЕТСЯ, МОМЕНТ ДЛЯ ПРИЗНАНИЯ НЕПОДХОДЯЩИЙ...
Мм...
НУ И ЛАДНО, ТАК МНЕ ТОЖЕ НРАВИТСЯ.
И ЧТО ТЕБЕ НРАВИТСЯ НА ЭТОТ РАЗ?
ДА, НИЧЕГО ТАКОГО...
Тхм
Я ПРОСТО ДУМАЛ, ИНТЕРЕСНО, А БЛАГОДАРЯ ЧЕМУ ВЫ, ХИМУРО-САН, ТАК ПОЛЮБИЛИ МАТЕМАТИКУ?..
.....
НАВЕРНОЕ, ПОТОМУ, ЧТО В МОЕЙ ЖИЗНИ ТОЛЬКО МАТЕМАТИКА ВСЕГДА БЫЛА ЯСНОЙ И ПОНЯТНОЙ...
?

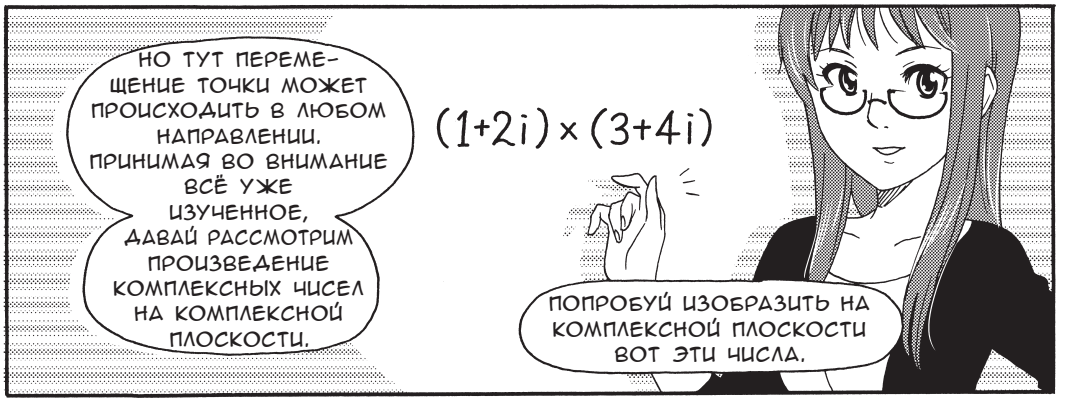

ОТНОШЕНИЯ В МОЕЙ СЕМЬЕ БЫЛИ НЕПРОСТЫЕ, И ЧАСТО БЫВАЛИ СИТУАЦИИ, КОГДА НЕПОНЯТНО, ЧТО ПРАВИЛЬНО, А ЧТО НЕТ...
Я ДУМАЮ, ПОЭТОМУ Я ТАК УВЛЕКЛАСЬ МАТЕМАТИКОЙ, ЧТО ОНА ВСЕГДА ДАЁТ ЧЁТКИЕ ОТВЕТЫ.
ВОТ ОНО ЧТО...
НЕ НУЖНО ДЕЛАТЬ ТАКОЕ ЛИЦО.
ЭТО ЖЕ ТОЛЬКО МОЯ ИСТОРИЯ.
НО...
МНЕ ДОСТАТОЧНО ТОГО, ЧТО В МОЕЙ ЖИЗНИ ЕСТЬ МАТЕМАТИКА.
ХВАТЬ
ДА И СТИПЕНДИЮ НА УЧЁБУ Я ПОЛУЧИЛА...
И К ТОМУ ЖЕ
МНЕ НРАВИТСЯ ДАВАТЬ ТЕБЕ УРОКИ!
!
...Я ПОНИМАЮ... ТОГДА И СЕГОДНЯ, БУДЬТЕ ТАК ЛЮБЕЗНЫ!

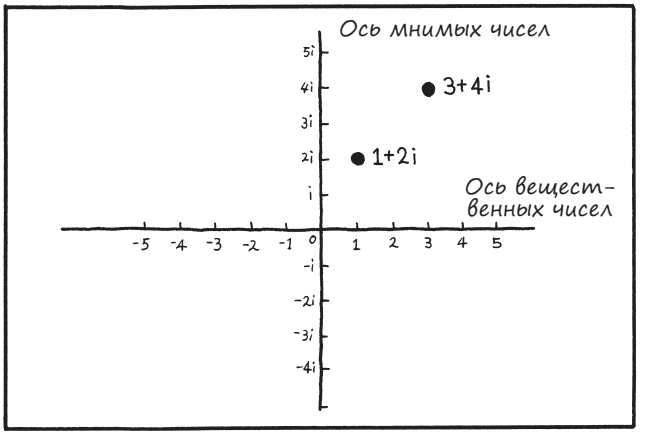

1. УМНОЖЕНИЕ КОМЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ
В ПРОШЛЫЙ И ПОЗАПРОШЛЫЙ РАЗЫ МЫ ГОВОРИЛИ О ФОРМУЛЕ ЭЙЛЕРА И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ. СЕГОДНЯ ЖЕ, НАКОНЕЦ, ВЕРНЁМСЯ НЕПОСРЕДСТВЕННО К КОМПЛЕКСНЫМ ЧИСЛАМ.


ЧТОБЫ БЫЛО ЛЕГЧЕ УМНОЖАТЬ И ДЕЛИТЬ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, А ТАКЖЕ ПРЕДСТАВЛЯТЬ ИХ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ,
МЫ УЖЕ МНОГО ВСЕГО ИЗУЧИЛИ, ТАК?
Мы разобрали виды чисел, затем связь между комплексными числами и экспоненциальной функцией, потом прошли формулу Эйлера...


ВЕРНО.
А ЕЩЁ ВСПОМНИ МАТРИЦУ ПОВОРОТА, КОТОРУЮ МЫ РАЗБИРАЛИ В ПРОШЛЫЙ РАЗ.
Полярная звезда
МЫ МОЖЕМ ОПРЕДЕЛИТЬ КООРДИНАТЫ ТОЧКИ ПОСЛЕ ПОВОРОТА, ЕСЛИ УМНОЖИМ ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ НА МАТРИЦУ ПОВОРОТА, ДА?


$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
Q(X,Y)
P(x,y)
θ
0
ДА, ТО ЕСТЬ УМНОЖЕНИЕ СТАНОВИТСЯ ЭКВИВАЛЕНТНО ПОВОРОТУ.
И, СКАЗАТЬ ПО ПРАВДЕ, УМНОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ ОЧЕНЬ ПОХОЖЕ.







$$|1+2i| = \sqrt{5},\ \angle \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = \angle \tan^{-1}(2) = \angle 1.11\ [\text{rad}] = \angle 63.4°$$

$$|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5,\ \angle \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \angle 0.927\ [\text{rad}] = \angle 53.1°$$

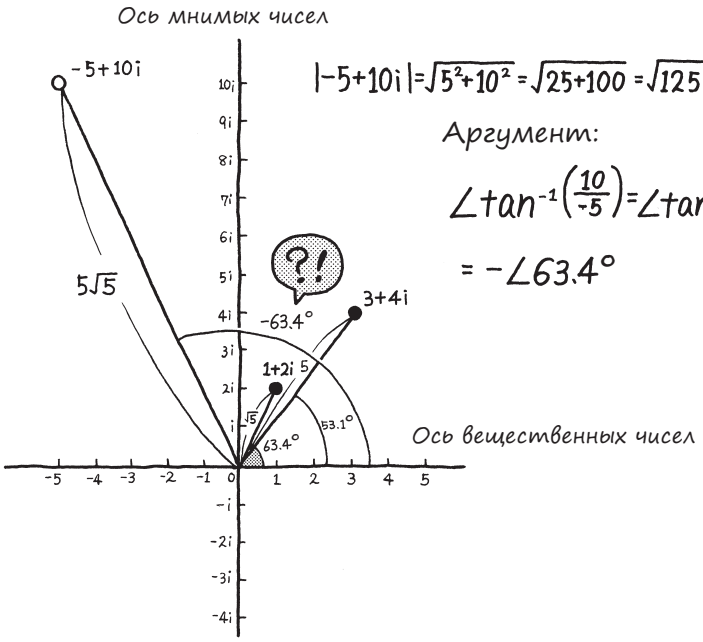




ТЕПЕРЬ ПЕРЕМНОЖИМ ЭТИ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. СНАЧАЛА ПЕРЕМНОЖИМ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ.

А ЗАТЕМ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ПОПРОБУЕМ ПРЕДСТАВИТЬ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ.

$$(1+2i)\times(3+4i)=1\times3+1\times4i+2i\times3+2i\times4i=3-8+(4+6)i=-5+10i$$

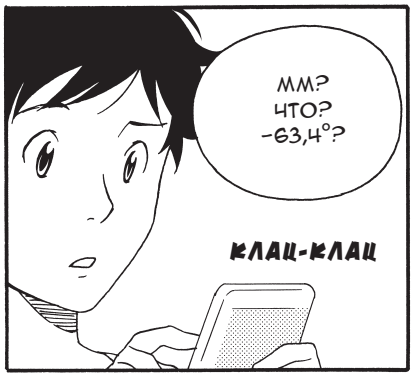


$$|-5+10i|=\sqrt{5^2+10^2}=\sqrt{25+100}=\sqrt{125}=\sqrt{25\times5}=\sqrt{5^2\times5}=5\sqrt{5}$$

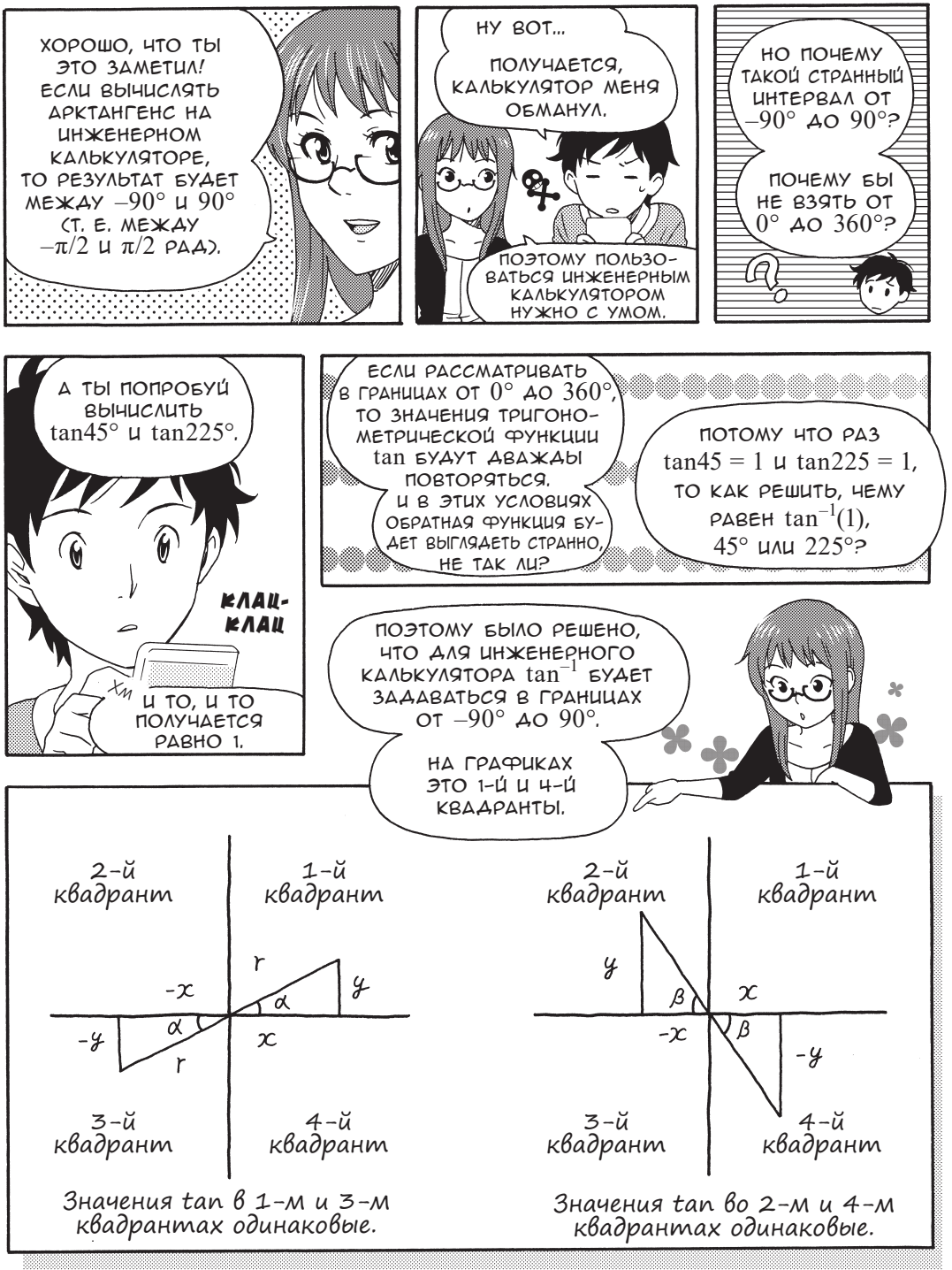
Аргумент:

$$\angle\tan^{-1}\left(\frac{10}{-5}\right)=\angle\tan^{-1}(-2)=-\angle1.11\,[\mathrm{rad}]$$

$$=-\angle63.4^\circ$$





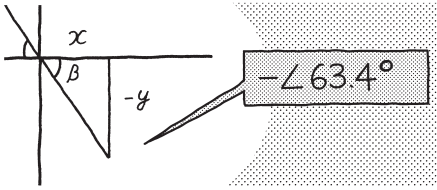

ХОРОШО, ЧТО ТЫ ЭТО ЗАМЕТИЛ! ЕСЛИ ВЫЧИСЛЯТЬ АРКТАНГЕНС НА ИНЖЕНЕРНОМ КАЛЬКУЛЯТОРЕ, ТО РЕЗУЛЬТАТ БУДЕТ МЕЖДУ –90° И 90° (Т. Е. МЕЖДУ –π/2 И π/2 РАД).
НУ ВОТ... ПОЛУЧАЕТСЯ, КАЛЬКУЛЯТОР МЕНЯ ОБМАНУЛ.
ПОЭТОМУ ПОЛЬЗОВАТЬСЯ ИНЖЕНЕРНЫМ КАЛЬКУЛЯТОРОМ НУЖНО С УМОМ.
НО ПОЧЕМУ ТАКОЙ СТРАННЫЙ ИНТЕРВАЛ ОТ –90° ДО 90°?
ПОЧЕМУ БЫ НЕ ВЗЯТЬ ОТ 0° ДО 360°?
А ТЫ ПОПРОБУЙ ВЫЧИСЛИТЬ tan45° И tan225°.
КЛАЦ-КЛАЦ
И ТО, И ТО ПОЛУЧАЕТСЯ РАВНО 1.
ЕСЛИ РАССМАТРИВАТЬ В ГРАНИЦАХ ОТ 0° ДО 360°, ТО ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ tan БУДУТ ДВАЖДЫ ПОВТОРЯТЬСЯ. И В ЭТИХ УСЛОВИЯХ ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ БУДЕТ ВЫГЛЯДЕТЬ СТРАННО, НЕ ТАК ЛИ?
ПОТОМУ ЧТО РАЗ tan45 = 1 И tan225 = 1, ТО КАК РЕШИТЬ, ЧЕМУ РАВЕН $\tan^{-1}(1)$, 45° ИЛИ 225°?
ПОЭТОМУ БЫЛО РЕШЕНО, ЧТО ДЛЯ ИНЖЕНЕРНОГО КАЛЬКУЛЯТОРА $\tan^{-1}$ БУДЕТ ЗАДАВАТЬСЯ В ГРАНИЦАХ ОТ –90° ДО 90°.
НА ГРАФИКАХ ЭТО 1-Й И 4-Й КВАДРАНТЫ.
2-й квадрант
1-й квадрант
3-й квадрант
4-й квадрант
r
-x
y
α
-y
x
Значения tan в 1-м и 3-м квадрантах одинаковые.
2-й квадрант
1-й квадрант
3-й квадрант
4-й квадрант
y
β
x
-x
-y
Значения tan во 2-м и 4-м квадрантах одинаковые.

У КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА $-5 + 10i$ ВЕЩЕСТВЕННАЯ ЧАСТЬ ОТРИЦАТЕЛЬНА, А МНИМАЯ ЧАСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНА, ПОЭТОМУ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ЭТО ЧИСЛО БУДЕТ РАСПОЛАГАТЬСЯ ВО 2-М КВАДРАНТЕ.





$$\tan\theta = \tan(\theta+\pi) = \tan(\theta+180°)$$

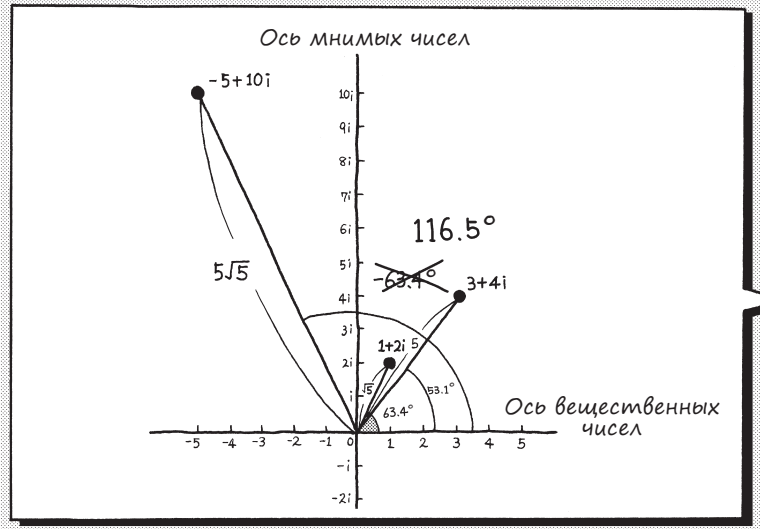


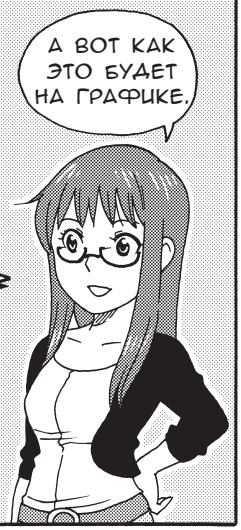
ПОЭТОМУ ЕСЛИ К УГЛУ $-63{,}4°$, НАХОДЯЩЕМУСЯ В 4-М КВАДРАНТЕ, ПРИБАВИТЬ $180°$ ИЛИ π РАДИАН, ТО ПОЛУЧИМ УГОЛ ВО 2-М КВАДРАНТЕ.

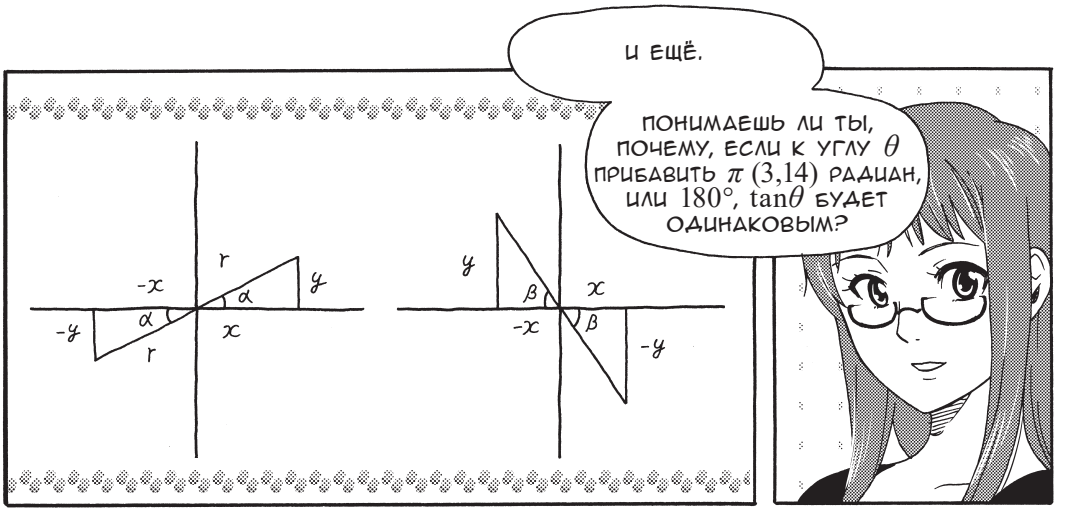


Аргумент комплексного числа $-5+10i$

$$-\angle 1.11(\text{rad}) + \pi = 2.03(\text{rad}) = -63.4° + 180° = 116.5°$$









$$\tan(\theta+180°)=\frac{\sin(\theta+180°)}{\cos(\theta+180°)}=\frac{-\sin(\theta)}{-\cos(\theta)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

ОБЪЯСНЕНИЕ ЭТОМУ ВЕСЬМА ПРОСТОЕ.





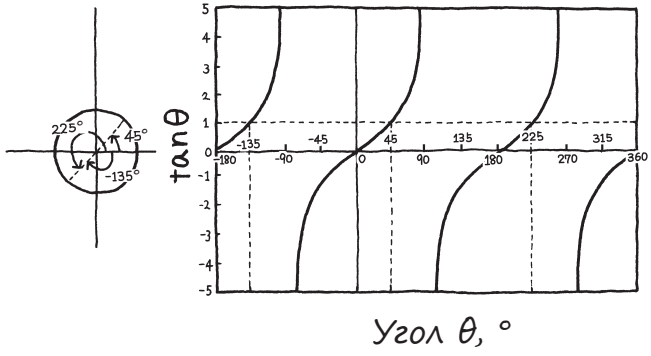
$$\sin(\theta+180°)=\sin\theta\cos 180°+\cos\theta\sin 180°=\sin\theta\times(-1)+\cos\theta\times 0=-\sin\theta$$

$$\cos(\theta+180°)=\cos\theta\cos 180°-\sin\theta\sin 180°=\cos\theta\times(-1)-\sin\theta\times 0=-\cos\theta$$

ОТЛИЧНО!

ГРАФИК ФУНКЦИИ $\tan\theta$ ВЫГЛЯДИТ ВОТ ТАК. ПОЭТОМУ НА ОДИН ОБОРОТ ПРИХОДИТСЯ ДВА ОДИНАКОВЫХ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ.

ПЕРЕМНОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ – НЕ ПРОСТОЕ ДЕЛО, ДА? РАЗ НУЖНО УЧИТЫВАТЬ ДАЖЕ ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $\tan^{-1}$...



А ТЕПЕРЬ ПОПРОБУЕМ ВЫРАЗИТЬ УМНОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ.

ПОХОЖЕ, БУДЕТ ЕЩЁ СЛОЖНЕЕ...

А ВОТ И НЕТ.

ЧТОБЫ ПЕРЕМНОЖИТЬ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ, НУЖНО ПРОСТО ПЕРЕМНОЖИТЬ ИХ МОДУЛИ И СЛОЖИТЬ АРГУМЕНТЫ.

$$\sqrt{5}\angle 63.4^\circ \times 5\angle 53.1^\circ = 5\sqrt{5}\angle(63.4+53.1)^\circ = 5\sqrt{5}\angle 116.5^\circ$$

И МЫ, ЕСТЕСТВЕННО, ПОЛУЧИЛИ ТОТ ЖЕ РЕЗУЛЬТАТ, ЧТО ПРИ УМНОЖЕНИИ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ.

НИЧЕГО СЕБЕ, КАК ПРОСТО!

КОНЕЧНО.

ВЕДЬ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ ТОЛЬКО УВЕЛИЧИВАЕТСЯ МОДУЛЬ (ИЛИ УМЕНЬШАЕТСЯ, ЕСЛИ ЧИСЛО МЕНЬШЕ 1) И СОВЕРШАЕТСЯ ПОВОРОТ НА УГОЛ, СООТВЕТСТВУЮЩИЙ АРГУМЕНТУ.





* См. главу 4, стр. 110.







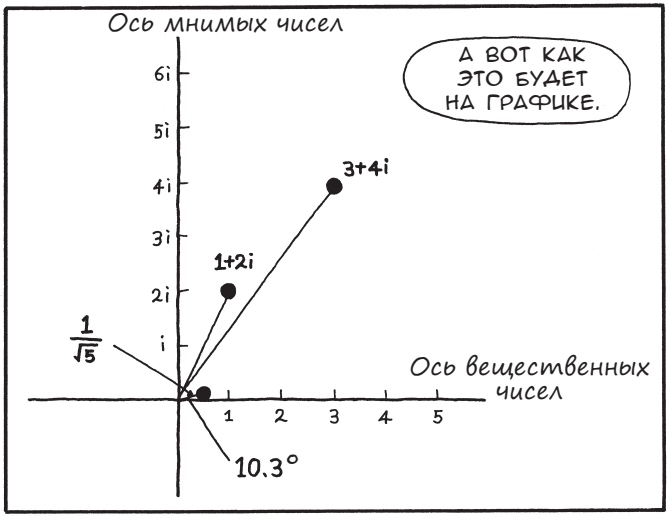


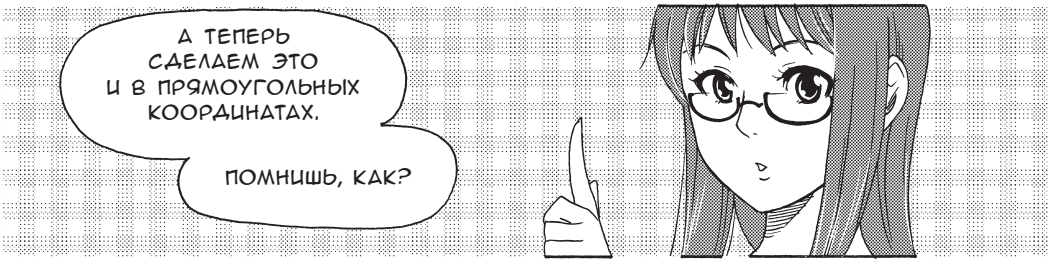




$$(1+2i)\div(3+4i)=\sqrt{5}\angle 63.4^\circ \div 5\angle 53.1^\circ = \frac{\sqrt{5}}{5}\angle(63.4-53.1)^\circ = \frac{1}{\sqrt{5}}\angle(10.3^\circ)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\angle(0.18) \text{ радиан (rad)}$$







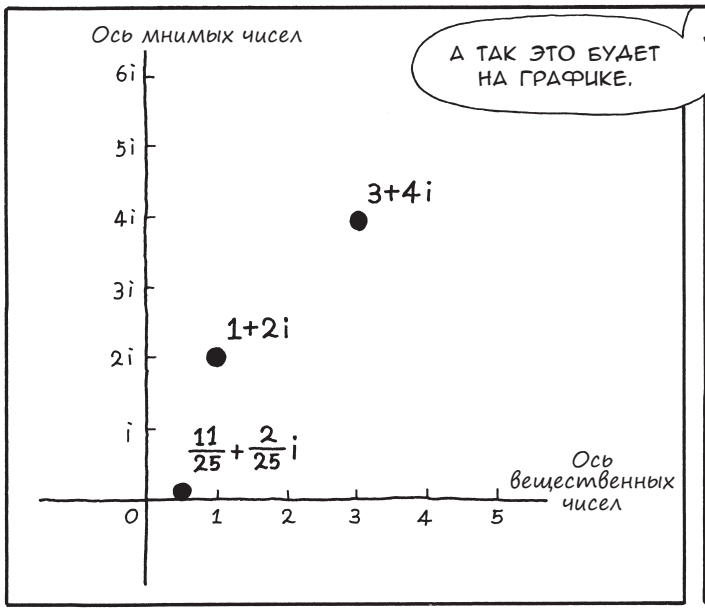




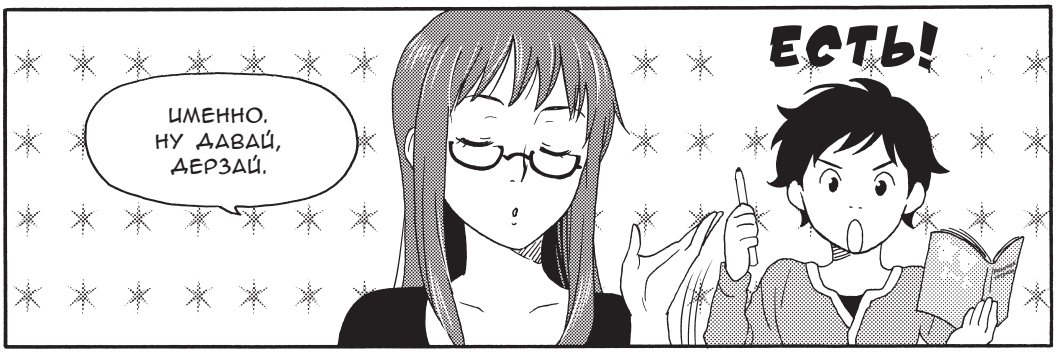
$$(1+2i)\div(3+4i)=\frac{1+2i}{3+4i}=\frac{(1+2i)\times(3-4i)}{(3+4i)\times(3-4i)}=\frac{3-4i+2i\times3-2i\times4i}{9-3\times4i+4i\times3-4i\times4i}=\frac{3-4i+6i-8i^2}{9-12i+12i-16i^2}$$

$$=\frac{3+2i-8\times(-1)}{9-16\times(-1)}=\frac{3+8+2i}{9+16}=\frac{11+2i}{25}=\frac{11}{25}+\frac{2i}{25}$$

СДЕЛАЛ.



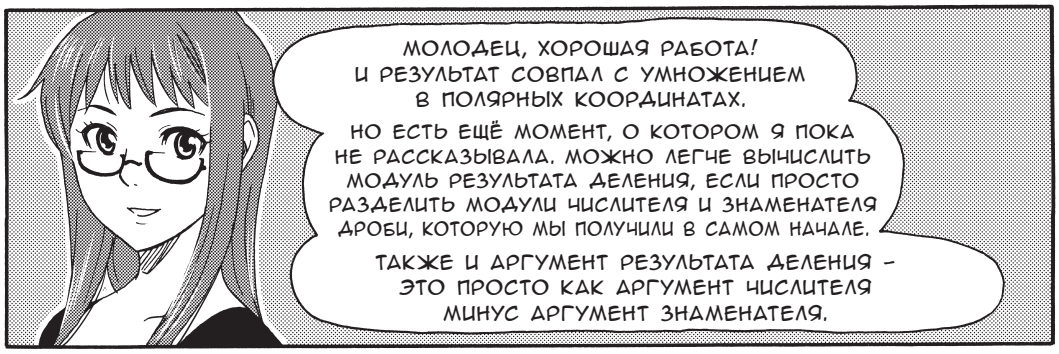




$$\sqrt{\left(\frac{11}{25}\right)^2+\left(\frac{2}{25}\right)^2}=\sqrt{\frac{121+4}{25^2}}=\frac{\sqrt{125}}{25}=\frac{\sqrt{25\times5}}{25}=\frac{\sqrt{5^2\times5}}{25}=\frac{5\sqrt{5}}{25}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Аргумент: $\tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{25}}{\frac{11}{25}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right)=10.3^\circ=0.18\,(\text{rad})$

ТАК, ДА?



$$\left|(1+2i)\div(3+4i)\right|=\left|\frac{1+2i}{3+4i}\right|=\left|\frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\left|\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9+16}}\right|=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

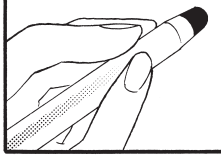
Аргумент: $\angle\left(\frac{1+2i}{3+4i}\right)=\angle(1+2i)-\angle(3-4i)=\tan^{-1}(2)-\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

$$=63.4^\circ-53.1^\circ=10.3^\circ$$

СЕЙЧАС Я ОБЪЯСНЮ, ПОЧЕМУ ЭТО ТАК.

$$Z_1 = r_1 e^{i\alpha}$$

$$Z_2 = r_2 e^{i\beta}$$





$$Z_1 \div Z_2 = r_1 e^{i\alpha} \div r_2 e^{i\beta} = \frac{r_1 e^{i\alpha}}{r_2 e^{i\beta}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha-\beta)}$$

$$\left| Z_1 \div Z_2 \right| = \frac{r_1}{r_2}, \angle\left(Z_1 \div Z_2\right) = \alpha - \beta$$








!
Улыбка
...поменяв взгляд на вещи...
Хм...
Вот, значит, какое у меня лицо, когда я улыбаюсь...
Ещё вкуснее
Рисовый чай!
Клубничный вкус
Интересно, что Юта обо мне думает?..
Человек...


ЧЕЛОВЕК, КОТОРЫЙ МНЕ НРАВИТСЯ...
...ЭТО ВЫ, ХИМУРО-САН!
БА-БАЦ
БА-БАЦ
ЧТО ЖЕ ЭТО..? МОЖЕТ, ЭТО ОН В ДРУГОМ СМЫСЛЕ?!.
А Я ТОЛЬКО ЗАМЕТИЛА... ЧТО ЖЕ ТЕПЕРЬ ДЕЛАТЬ?!.

Таблица значений тригонометрических функций для разных углов, измеряемых в градусах и радианах

Угол θ, ° (против часовой стрелки)	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Угол θ, ° (по часовой стрелке)	−360	−330	−315	−300	−270	−240	−225	−210	−180	−150	−135	−120	−90	−60	−45	−30	0
Угол θ, рад (против часовой стрелки)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Угол θ, рад (по часовой стрелке)	-2π	$-\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Радианная мера угла (единица измерения радиан, или rad, или radian): прямой угол – π/2 rad, прямая линия – π rad, полный круг – 2π rad. Градусная мера угла (единица измерения градус, или °, или degree): прямой угол – 90 °, прямая линия – 180 °, полный круг – 360 °.

Ч. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ

Ниже представлены основные формулы и свойства, связанные со степенями.

$$n \times n = n^2 \qquad n \times n \times n = n^3$$

$$(n \times n) \times (n \times n \times n) = n^2 \times n^3 \qquad n^a \times n^b = n^{(a+b)}$$
$$= n^{(2+3)}$$
$$= n^5$$

$$n^{-a} = \frac{1}{n^a}$$

$$n^5 \div n^3 = \frac{n^5}{n^3} \qquad n^2 \div n^5 = \frac{n^2}{n^5} \qquad n^a \div n^b = \frac{n^a}{n^b}$$
$$= n^{(5-3)} \qquad = n^{(2-5)} \qquad = n^{(a-b)}$$
$$= n^2 \qquad = n^{-3} \qquad = \frac{1}{n^{-(a-b)}}$$
$$= \frac{1}{n^3}$$

$$n^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{n^b} \qquad (n^a)^b = n^{ab}$$
$$= \left(n^{\frac{1}{a}}\right)^b$$
$$= \left(n^b\right)^{\frac{1}{a}}$$

$$(mn)^a = m^a n^a \qquad \left(\frac{m}{n}\right)^a = \frac{m^a}{n^a}$$
$$= n^a m^a$$

5. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Определение логарифма

Что такое функция, обратная к функции $y = ax$? Чтобы найти обратную функцию, переобозначим: наша функция теперь будет $x = ay$. Теперь выразим отсюда y через x. Такой y как раз и будет логарифмической функцей. Другими словами, логарифмическая и показательная функция взаимно-обратны. Логарифмическая функция записывается так:

$y = \log_a x$,

где a называется основанием логарифма или основанием логарифмической функции.

Однако если a равно 0 или 1, то, так как $0y = 0$ и $1y = 1$, y может принимать любое значение, а x будет 0 или 1. Кроме того, если a – отрицательное число, то тоже возникает проблема. Например, рассмотрим случай, когда $a = -2$:

$(-2)^1 = -2, \quad (-2)^2 = 4, \quad (-2)^3 = -8.$

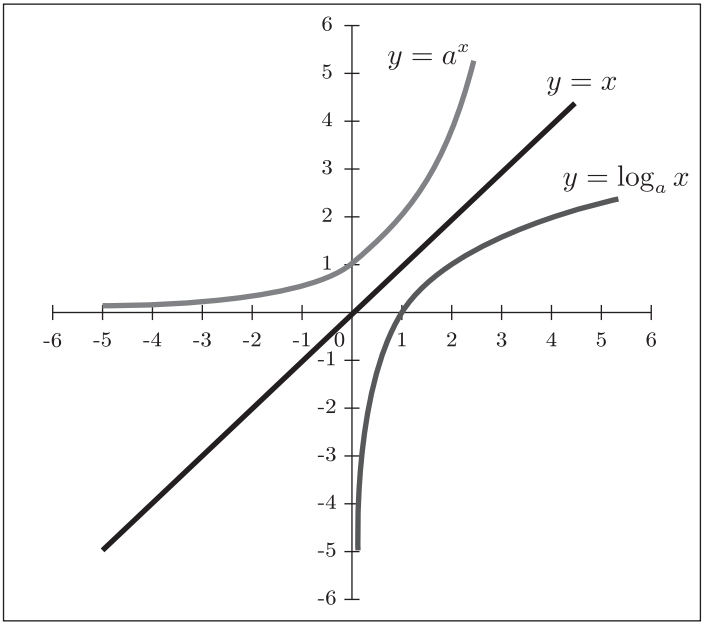
Как мы видим, знак чередуется. В этом случае, если y не является целым числом, мы не сможем оставаться в рамках вещественных чисел. Например, если $y = 1{,}5$, то мы получим следующее:

$$\begin{aligned}
(-2)^{1.5} &= (-2)^{\frac{3}{2}} \\
&= \{2 \times (-1)\}^{\frac{3}{2}} \\
&= \{2(\cos\pi + i\sin\pi)\}^{\frac{3}{2}} \\
&= \left\{2e^{i\pi}\right\}^{\frac{3}{2}} \\
&= 2^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3}{2}\pi} \\
&= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 \left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^3 (0 - i) = -2\sqrt{2}i.
\end{aligned}$$

Таким образом, было решено считать, что основание логарифма a должно быть положительно ($a > 0$) и не может быть равно 1. А в этом случае, так как $x = ay$, x тоже всегда положителен. И для логарифмической функции $y = \log ax$ условие $x > 0$ является необходимым. Отдельно выделяют десятичный логарифм – это логарифм с основанием $a = 10$, и натуральный логарифм – логарифм с основанием $a = e$ (где e – число Непера).

Исходя из свойств обратных функций, графики функций $y = ax$ и $y = \log_a x$ симметричны относительно прямой $y = x$.

Ниже приведён пример для $a = 2$.



Графики показательной и логарифмической функций

Основные свойства логарифмических функций:

$$\log_a 1 = 0;$$

$$\log_a a = 1;$$

$$\log_a (AB) = \log_a A + \log_a B;$$

$$\log_a \left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B;$$

$$\log_a A^B = B \log_a A;$$

$$\log_a A = \frac{\log_C A}{\log_C a}$$ – свойство замены основания логарифма.

6. ПОЧЕМУ (–1)·(–1)=1?

Отрицательные числа обычно изучают в средней школе. Я помню, как учитель математики говорил нам: «Запомните, что (–1)·(–1)=1». Но разве не странно, что перемножение отрицательных чисел даёт положительное число? Если рассмотреть на примере денег и взять сбережения за положительное число, а долг за отрицательное, то получается, что долг·долг = = сбережения? Как ни крути, а это весьма странно. Но ответ на этот вопрос я получил, изучая математику в университете.

Давайте вспомним формулу Эйлера:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Если вместо θ подставить 180° (или π радиан), то получим:

$$\begin{aligned} e^{i180^\circ} &= e^{i\pi} \\ &= \cos(180^\circ) + i\sin(180^\circ) \\ &= \cos(\pi) + i\sin(\pi) \\ &= -1 + i(0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Вспомним умножение комплексных чисел. Если умножаем число на –1, то это означает, что модуль умножаемого числа умножаем на модуль –1. Другими словами, увеличиваем модуль умножаемого числа в 1 раз. К аргументу же умножаемого числа прибавляем аргумент числа –1, а аргумент числа –1 равен 180° (или π радианам).

Рассмотрим теперь , что же будет, если перемножить (–1)·(–1) как комплексные числа:

$$\begin{aligned} (-1)\times(-1) &= e^{i180^\circ} \times e^{i180^\circ} \\ &= e^{i\pi} \times e^{i\pi} \\ &= e^{i(180^\circ+180^\circ)} \\ &= e^{i(\pi+\pi)} \\ &= e^{i360} \\ &= e^{i2\pi} \\ &= \cos(360^\circ) + i\sin(360^\circ) \\ &= \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) \\ &= 1 + i\times(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

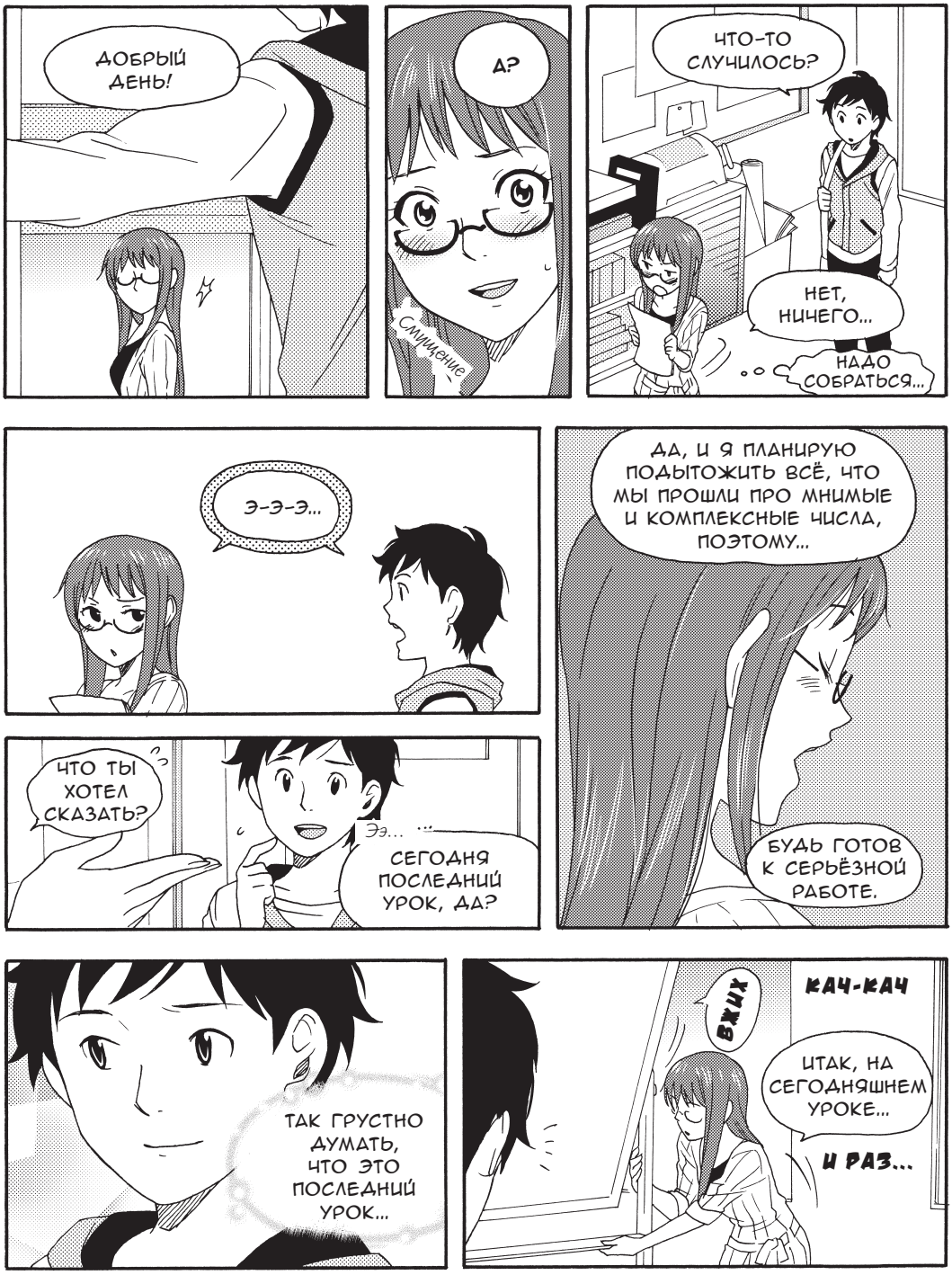
Другими словами, в мире математики –1 – это не долг, а число с модулем 1, показывающее поворот на 180° (π радиан). Таким образом, умножая дважды на –1, мы совершаем оборот на 360° (2π радиан). Модуль же остаётся равен 1. А 360° (2π радиан) – это то же самое, что 0° (0 радиан). Поэтому мы и получаем в результате 1.

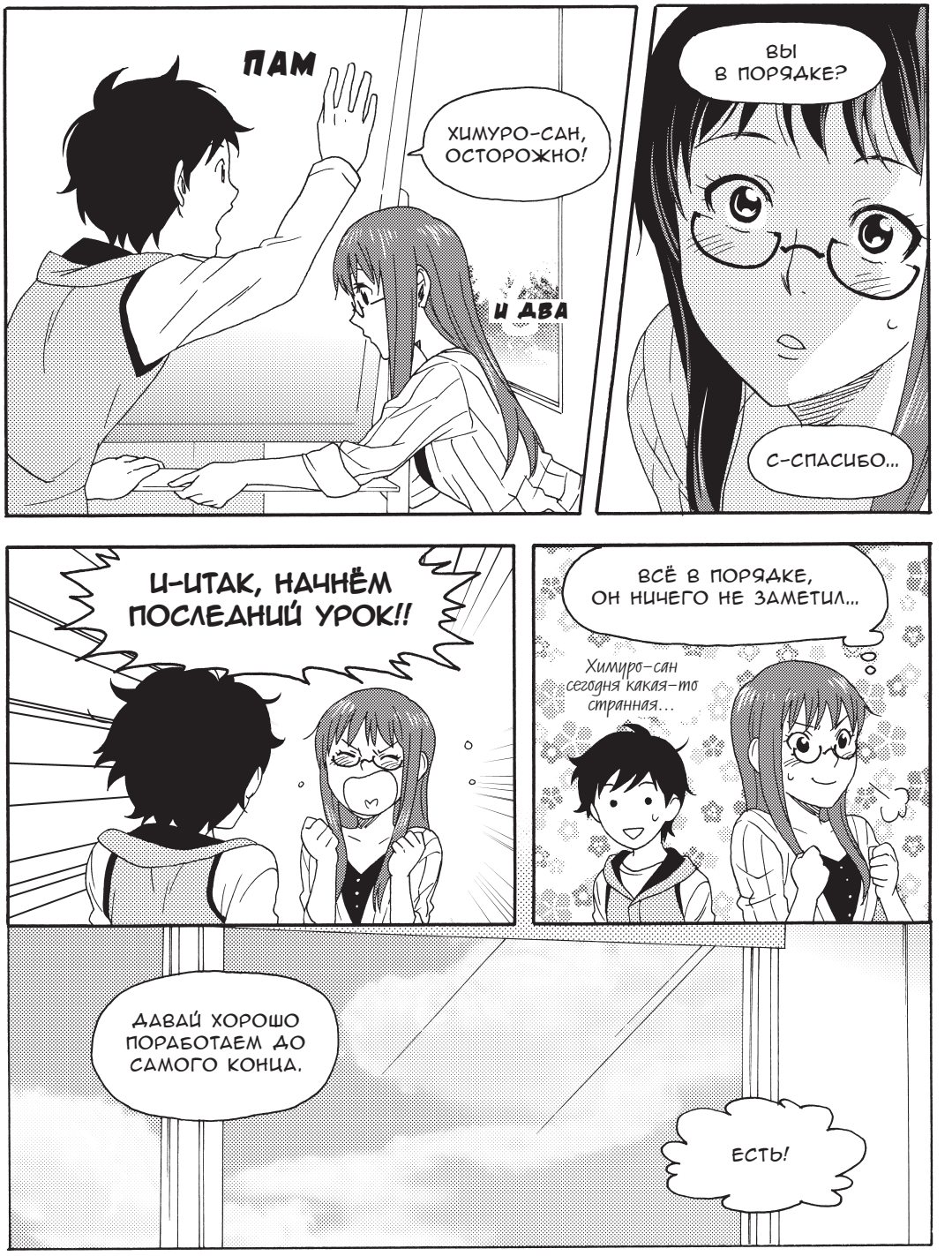
Глава



ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ


ОНА ПРОИГНОРИРОВАЛА ТВОЁ ПРИЗНАНИЕ?!
У ЭТОЙ КОРОЛЕВЫ БОЛЬШОЕ САМОМНЕНИЕ, ОДНАКО!
ЭТО НЕ ТАК! ВОЗМОЖНО, ОНА СПЕЦИАЛЬНО ТАК СДЕЛАЛА...
...ЧТОБЫ НА ПОСЛЕДНЕЙ ЛЕКЦИИ Я НЕ ЧУВСТВОВАЛ СЕБЯ НЕУДОБНО.
ХМ...
ЭТО ВОЗМОЖНО... НО ВСЁ-ТАКИ, ИСХОДЯ ИЗ МОЕГО ОПЫТА, Я ДУМАЮ, ЧТО ТЕБЕ БОЛЬШЕ НЕ НА ЧТО НАДЕЯТЬСЯ.
ЧПОК
ДАЖЕ ЕСЛИ И ТАК, КОГДА ПОСЛЕДНИЙ УРОК ЗАКОНЧИТСЯ...
...Я ЕЩЁ РАЗ ЕЙ ВСЁ СКАЖУ.
ДА ТЫ И ВПРЯМЬ КРУТ, ЮТА!
ХЛОП
ПОЛОЖИСЬ НА МЕНЯ, Я ОРГАНИЗУЮ ТЕБЕ УТЕШИТЕЛЬНУЮ ВЕЧЕРИНКУ!
АУДИТОРИЯ ДЛЯ ЗАНЯТИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ХИМУРО
КАЧ-КАЧ


ДОБРЫЙ ДЕНЬ!
А?
Смущение
ЧТО-ТО СЛУЧИЛОСЬ?
НЕТ, НИЧЕГО...
НАДО СОБРАТЬСЯ...
Э-Э-Э...
ЧТО ТЫ ХОТЕЛ СКАЗАТЬ?
Э?
Э-э...
СЕГОДНЯ ПОСЛЕДНИЙ УРОК, ДА?
ДА, И Я ПЛАНИРУЮ ПОДЫТОЖИТЬ ВСЁ, ЧТО МЫ ПРОШЛИ ПРО МНИМЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ПОЭТОМУ...
БУДЬ ГОТОВ К СЕРЬЁЗНОЙ РАБОТЕ.
ТАК ГРУСТНО ДУМАТЬ, ЧТО ЭТО ПОСЛЕДНИЙ УРОК...
ВЖИХ
КАЧ-КАЧ
ИТАК, НА СЕГОДНЯШНЕМ УРОКЕ...
И РАЗ...


ПАМ
ХИМУРО-САН, ОСТОРОЖНО!
И ДВА
ВЫ В ПОРЯДКЕ?
С-СПАСИБО...
И-ИТАК, НАЧНЁМ ПОСЛЕДНИЙ УРОК!!
ВСЁ В ПОРЯДКЕ, ОН НИЧЕГО НЕ ЗАМЕТИЛ...
Химуро-сан сегодня какая-то странная...
ДАВАЙ ХОРОШО ПОРАБОТАЕМ ДО САМОГО КОНЦА.
ЕСТЬ!





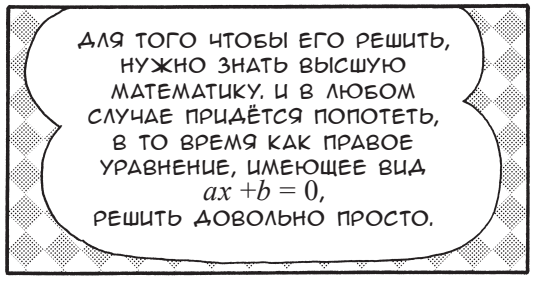
$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}=\sqrt{2}V_m\sin(\omega t)\rightarrow RI+j\omega LI=V$$

Дифференциальное уравнение для силы тока -> *Алгебраическое уравнение с комплексными числами для силы тока*

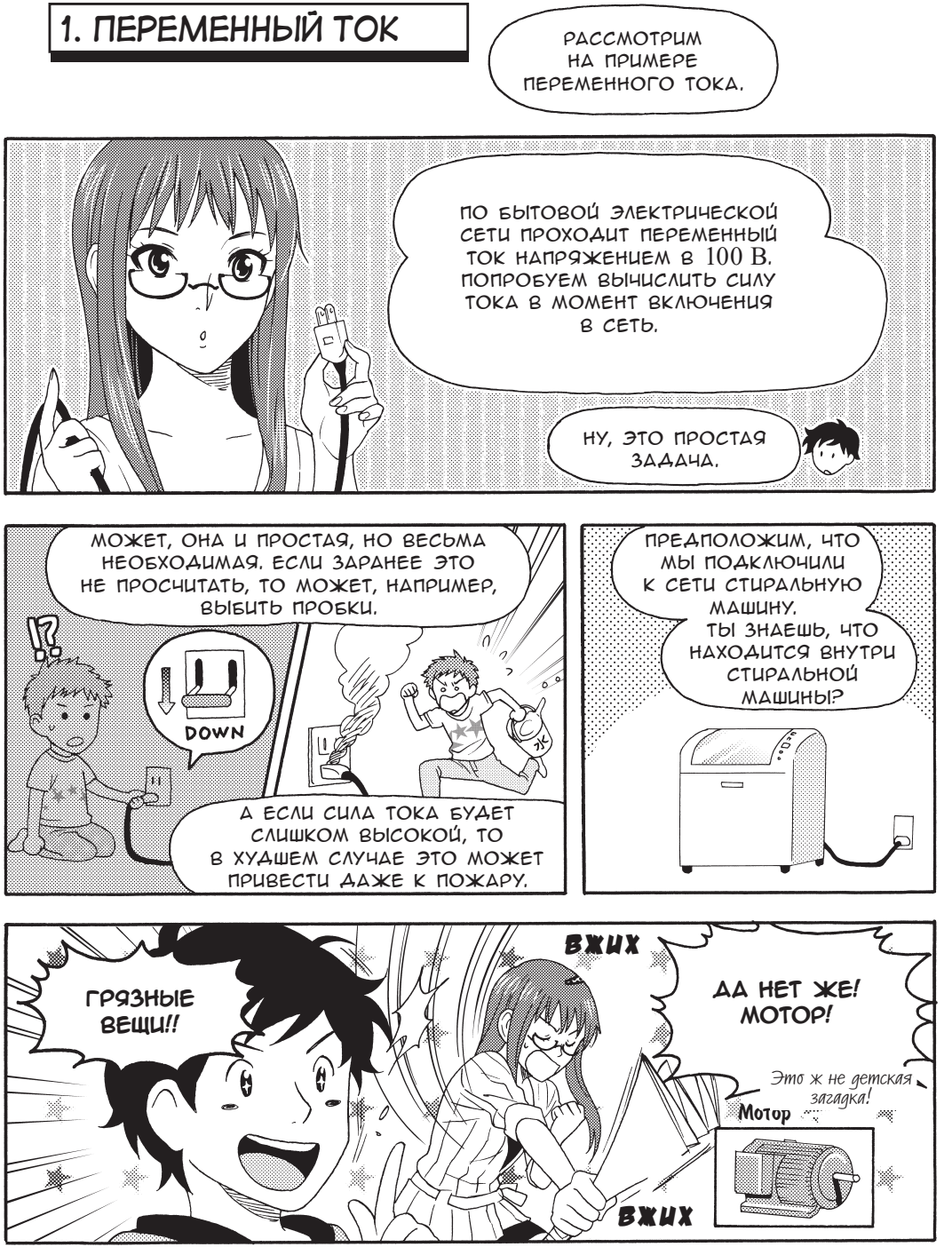


Про действующие значения см. на стр. 193.





1. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

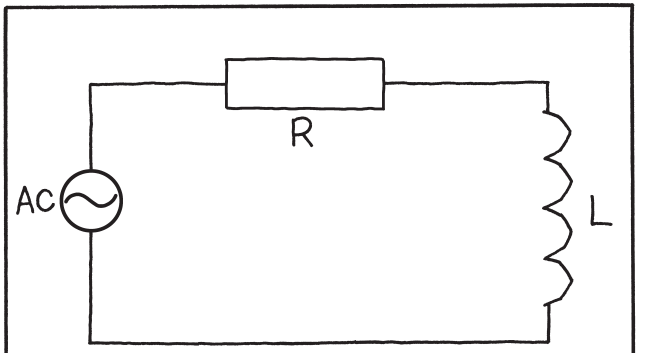



ВНУТРИ МОТОРА НАХОДИТСЯ КАТУШКА, ПО КОТОРОЙ И ПРОХОДИТ ТОК. НАПРЯЖЕНИЕ НА КОНЦАХ КАТУШКИ V_L ВЫРАЖАЕТСЯ ВОТ ТАК:
$V_L = L \frac{di(t)}{dt}$
ВОТ УЖЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ.
НО ЗДЕСЬ i – ЭТО НЕ МНИМАЯ ЕДИНИЦА, А СИЛА ТОКА. НЕ ПУТАЙ, ПОЖАЛУЙСТА.
Электрический ток
i Мнимая единица
ЭТО УРАВНЕНИЕ БЫЛО ПОЛУЧЕНО ПРАКТИЧЕСКИМ ПУТЁМ, ТАК ЧТО ПРОСТО ПРИНИМАЕМ ЕГО КАК ДАННОСТЬ.
ПЕРЕМЕННЫЙ ЖЕ ТОК МЕНЯЕТСЯ С ТЕЧЕНИЕМ ВРЕМЕНИ, ПОЭТОМУ ЗДЕСЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК i – ЭТО ФУНКЦИЯ ОТ ВРЕМЕНИ t.
$= L \frac{di(t)}{dt}$
И ТАК КАК В ЭТОМ УРАВНЕНИИ ЕСТЬ УМНОЖЕНИЕ НА КОЭФФИЦИЕНТ САМОИНДУКЦИИ L, ТО НАПРЯЖЕНИЕ ОБОЗНАЧАЕТСЯ С ИНДЕКСОМ V_L.
А ЧТО ТАКОЕ КОЭФФИЦИЕНТ САМОИНДУКЦИИ?
Такое трудно-произносимое название...
ЕСЛИ ОЧЕНЬ КОРОТКО, ТО КОЭФФИЦИЕНТ САМОИНДУКЦИИ – ЭТО СПОСОБНОСТЬ ПОДДЕРЖИВАТЬ ПОСТОЯННОЕ ЗНАЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА.
Высокий коэффициент самоиндукции
⇓
сила тока меняется слабо
Низкий коэффициент самоиндукции
⇓
сила тока меняется сильно
НЕ ОБРАЩАЙ ВНИМАНИЯ НА НАЗВАНИЕ, ПРОСТО СЧИТАЙ ЭТО СВОЙСТВОМ КАТУШКИ.



$$V_R = Ri(t)$$

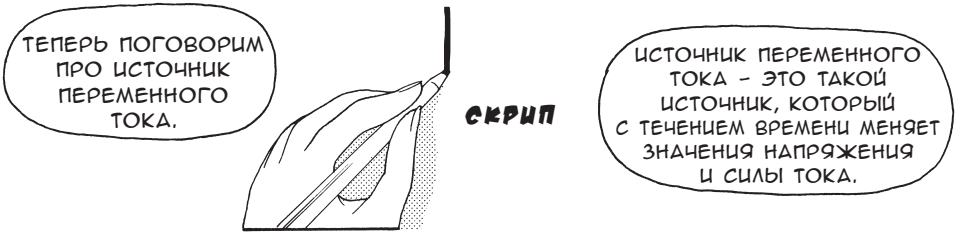
ЕСЛИ СОПРОТИВЛЕНИЕ ОБОЗНАЧИТЬ КАК R (ПО ПЕРВОЙ БУКВЕ СЛОВА RESISTANCE), ТО НАПРЯЖЕНИЕ НА КОНЦАХ РЕЗИСТОРА V_R БУДЕТ ОПРЕДЕЛЯТЬСЯ ПО ВОТ ЭТОЙ ФОРМУЛЕ. ЭТО – ЗАКОН ОМА.

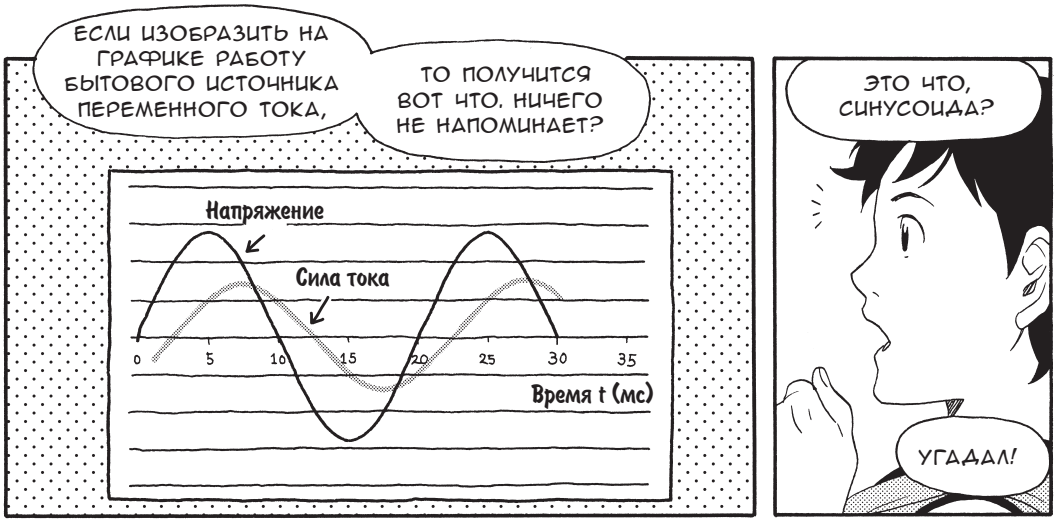


Последовательное соединение катушки и резистора

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$







Переменное напряжение:

$$\sqrt{2}\,V_m \sin(\omega t)$$

Переменный ток:

$$\sqrt{2}\,I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

СТАНДАРТНЫЕ БЫТОВЫЕ НАПРЯЖЕНИЕ И СИЛА ТОКА ОПИСЫВАЮТСЯ ФУНКЦИЕЙ sin.

V_m – *действующее значение напряжения;*

I_m – *действующее значение переменного тока;*

ω – *циклическая частота, равна* $2\pi f$;

(в Японии сетевое напряжение имеет действующее значение 100 В, пиковое – 141,42 В)

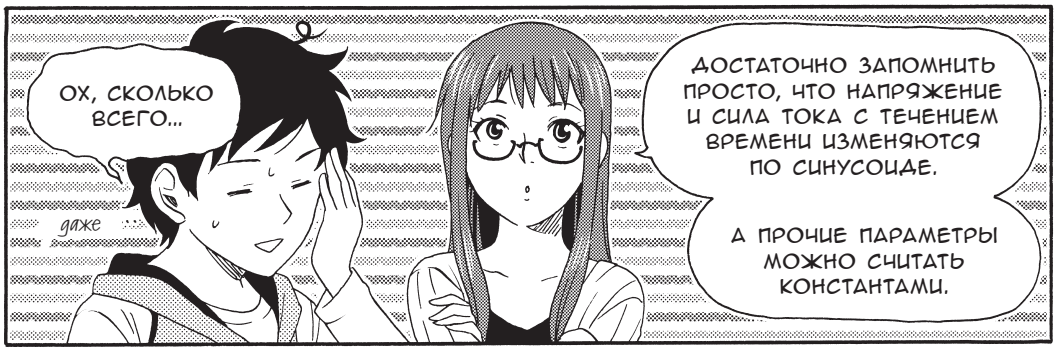
(в восточной Японии стандартная частота f равна 50 Гц:

$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 100\pi = 314.159$ [rad/s] *radian per second)*

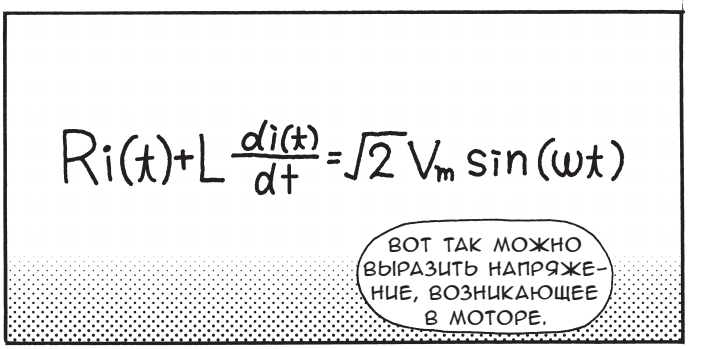
(в западной Японии стандартная частота f равна 60 Гц:

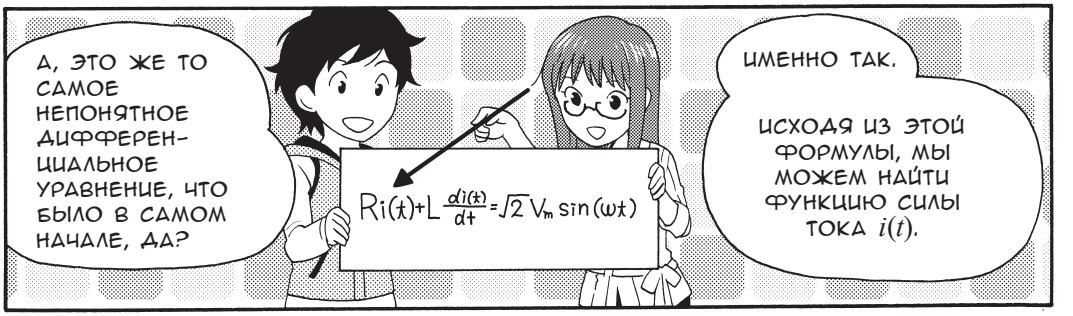
$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 60 = 120\pi = 376.99$ [rad/s])

φ – *сдвиг фаз, разность фаз колебаний напряжения и тока.*

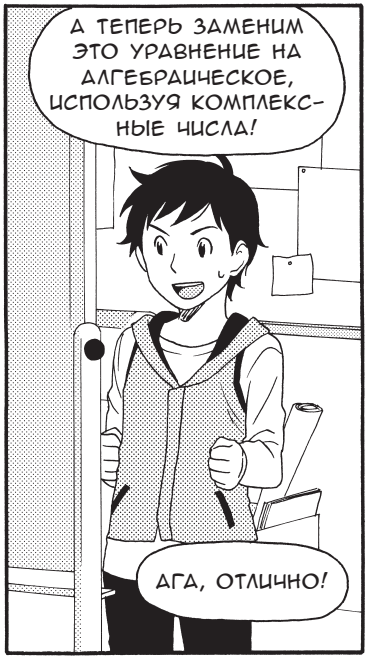






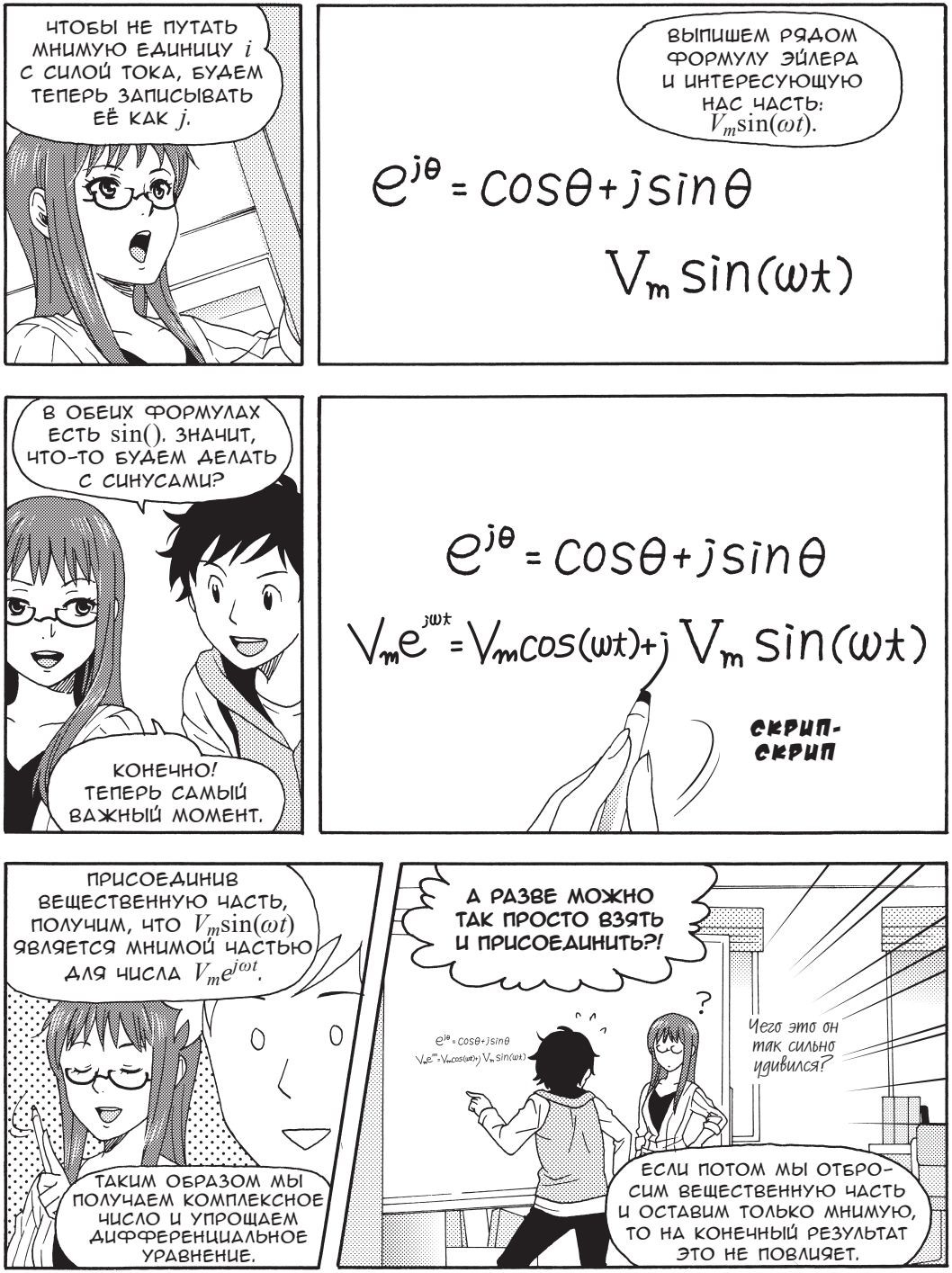


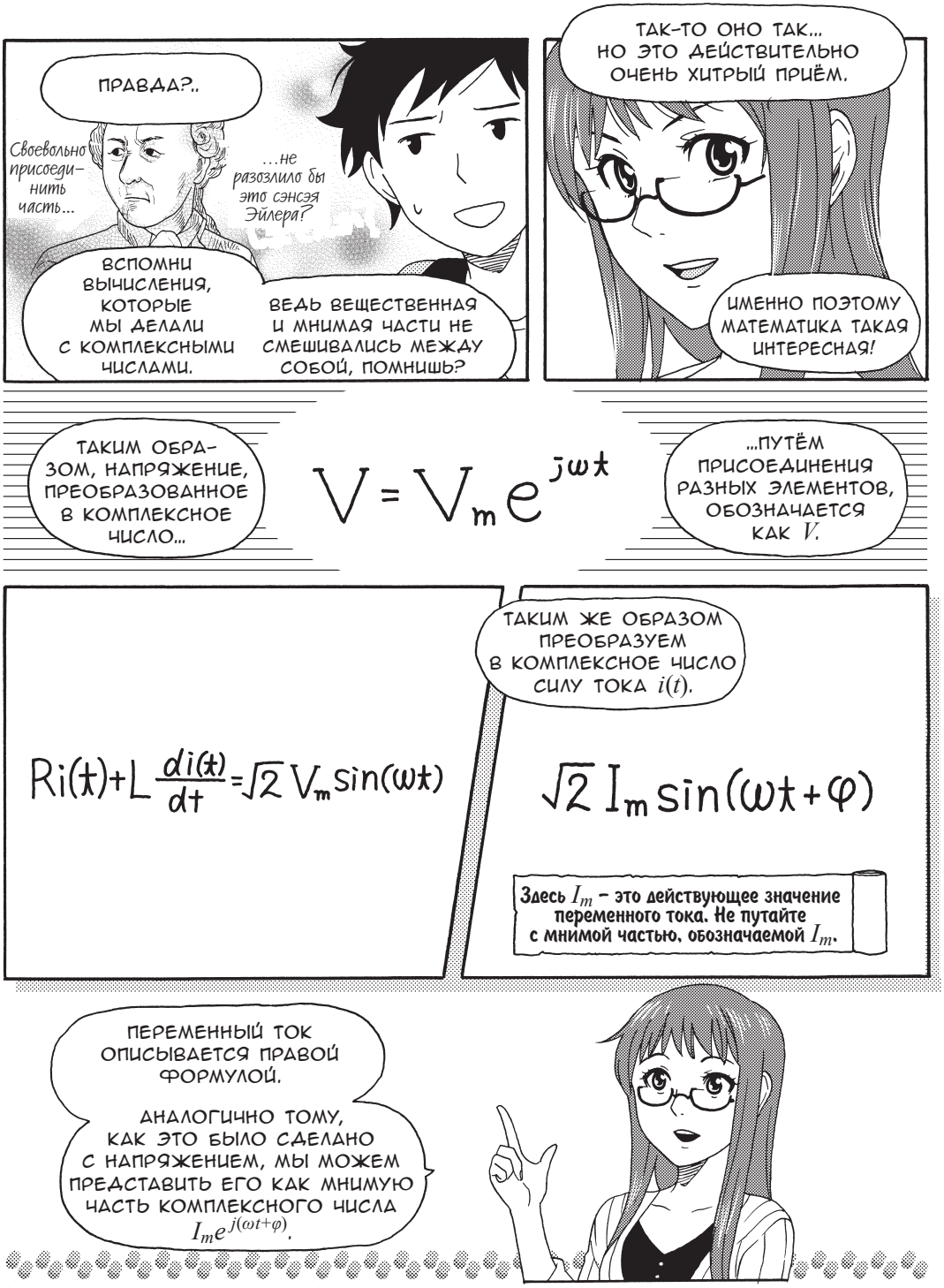
2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

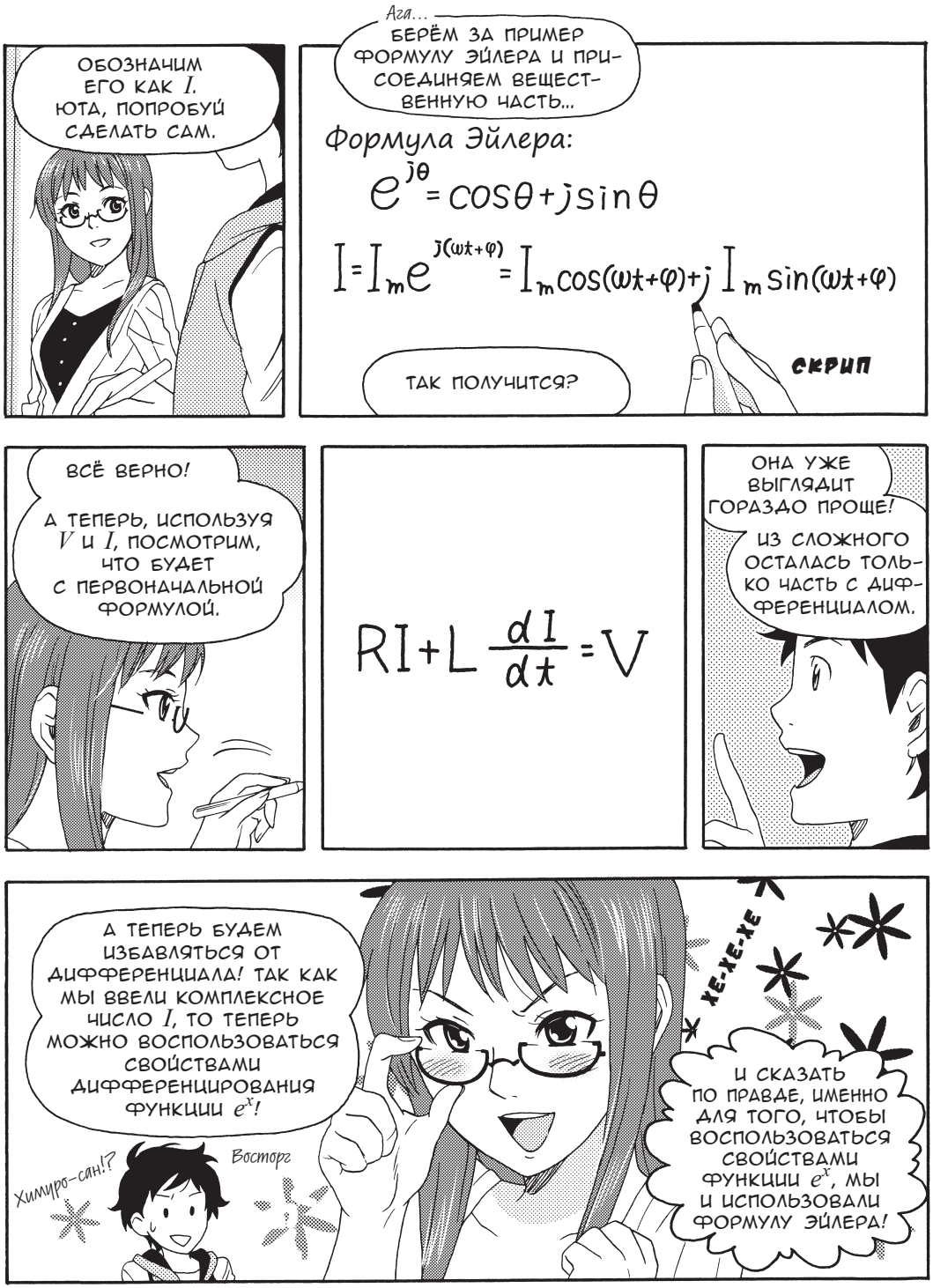







ЧТОБЫ НЕ ПУТАТЬ МНИМУЮ ЕДИНИЦУ i С СИЛОЙ ТОКА, БУДЕМ ТЕПЕРЬ ЗАПИСЫВАТЬ ЕЁ КАК j.
ВЫПИШЕМ РЯДОМ ФОРМУЛУ ЭЙЛЕРА И ИНТЕРЕСУЮЩУЮ НАС ЧАСТЬ: $V_m\sin(\omega t)$.
$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$
$V_m \sin(\omega t)$
В ОБЕИХ ФОРМУЛАХ ЕСТЬ sin(). ЗНАЧИТ, ЧТО-ТО БУДЕМ ДЕЛАТЬ С СИНУСАМИ?
КОНЕЧНО! ТЕПЕРЬ САМЫЙ ВАЖНЫЙ МОМЕНТ.
$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$
$V_m e^{j\omega t} = V_m \cos(\omega t) + j\, V_m \sin(\omega t)$
СКРИП-СКРИП
ПРИСОЕДИНИВ ВЕЩЕСТВЕННУЮ ЧАСТЬ, ПОЛУЧИМ, ЧТО $V_m\sin(\omega t)$ ЯВЛЯЕТСЯ МНИМОЙ ЧАСТЬЮ ДЛЯ ЧИСЛА $V_m e^{j\omega t}$.
ТАКИМ ОБРАЗОМ МЫ ПОЛУЧАЕМ КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО И УПРОЩАЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ.
А РАЗВЕ МОЖНО ТАК ПРОСТО ВЗЯТЬ И ПРИСОЕДИНИТЬ?!
?
Чего это он так сильно удивился?
ЕСЛИ ПОТОМ МЫ ОТБРОСИМ ВЕЩЕСТВЕННУЮ ЧАСТЬ И ОСТАВИМ ТОЛЬКО МНИМУЮ, ТО НА КОНЕЧНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ЭТО НЕ ПОВЛИЯЕТ.


ПРАВДА?..
Своевольно присоединить часть...
...не разозлило бы это сэнсэя Эйлера?
ВСПОМНИ ВЫЧИСЛЕНИЯ, КОТОРЫЕ МЫ ДЕЛАЛИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ.
ВЕДЬ ВЕЩЕСТВЕННАЯ И МНИМАЯ ЧАСТИ НЕ СМЕШИВАЛИСЬ МЕЖДУ СОБОЙ, ПОМНИШЬ?
ТАК-ТО ОНО ТАК... НО ЭТО ДЕЙСТВИТЕЛЬНО ОЧЕНЬ ХИТРЫЙ ПРИЁМ.
ИМЕННО ПОЭТОМУ МАТЕМАТИКА ТАКАЯ ИНТЕРЕСНАЯ!
ТАКИМ ОБРАЗОМ, НАПРЯЖЕНИЕ, ПРЕОБРАЗОВАННОЕ В КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО...
$V = V_m e^{j\omega t}$
...ПУТЁМ ПРИСОЕДИНЕНИЯ РАЗНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ОБОЗНАЧАЕТСЯ КАК V.
$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}=\sqrt{2}V_m\sin(\omega t)$
ТАКИМ ЖЕ ОБРАЗОМ ПРЕОБРАЗУЕМ В КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО СИЛУ ТОКА $i(t)$.
$\sqrt{2}I_m\sin(\omega t+\varphi)$
Здесь I_m – это действующее значение переменного тока. Не путайте с мнимой частью, обозначаемой I_m.
ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК ОПИСЫВАЕТСЯ ПРАВОЙ ФОРМУЛОЙ.
АНАЛОГИЧНО ТОМУ, КАК ЭТО БЫЛО СДЕЛАНО С НАПРЯЖЕНИЕМ, МЫ МОЖЕМ ПРЕДСТАВИТЬ ЕГО КАК МНИМУЮ ЧАСТЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА $I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$.


Обозначим его как I. Юта, попробуй сделать сам.
Ага...
Берём за пример формулу Эйлера и присоединяем вещественную часть...
Формула Эйлера:
$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$
$I = I_m e^{j(\omega t+\varphi)} = I_m \cos(\omega t+\varphi) + j I_m \sin(\omega t+\varphi)$
Так получится?
Скрип
Всё верно!
А теперь, используя V и I, посмотрим, что будет с первоначальной формулой.
$RI + L\frac{dI}{dt} = V$
Она уже выглядит гораздо проще!
Из сложного осталась только часть с дифференциалом.
А теперь будем избавляться от дифференциала! Так как мы ввели комплексное число I, то теперь можно воспользоваться свойствами дифференцирования функции e^x!
Хи-хе-хе
И сказать по правде, именно для того, чтобы воспользоваться свойствами функции e^x, мы и использовали формулу Эйлера!
Химиро-сан!?
Восторг



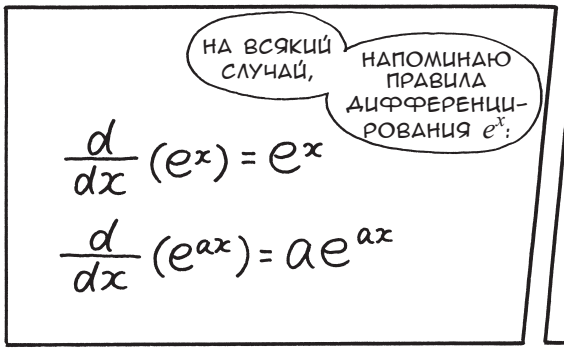


Число Непера:

$e = 2.718281828\cdots$

См. стр. 102.







$$I = I_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$



Так как I_m – это константа, то мы можем вынести его за дифференциал d/dt:

$$L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(I_m e^{j(\omega t+\varphi)}\right) = LI_m \frac{d}{dt}\left(e^{j(\omega t+\varphi)}\right)$$

Вот и получили дифференциал функции e^x.

На первый взгляд функция выглядит сложно, но на самом деле переменная там – только время t, а всё остальное – это константы.

Сначала рассмотрим отдельно выражение под дифференциалом и произведём вычисления:

Константа

$$\frac{d}{dt}\left(e^{j(\omega t+\varphi)}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}e^{j\varphi}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right)e^{j\varphi} = j\omega e^{j\omega t}e^{j\varphi} = j\omega e^{j(\omega t+\varphi)}$$

Следовательно,

$$L\frac{di}{dt} = LI_m\frac{d}{dt}\left(e^{j(\omega t+\varphi)}\right) = LI_m j\omega e^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega LI_m e^{j(\omega t+\varphi)}$$

Вот мы и избавились от дифференциала в нашей формуле.

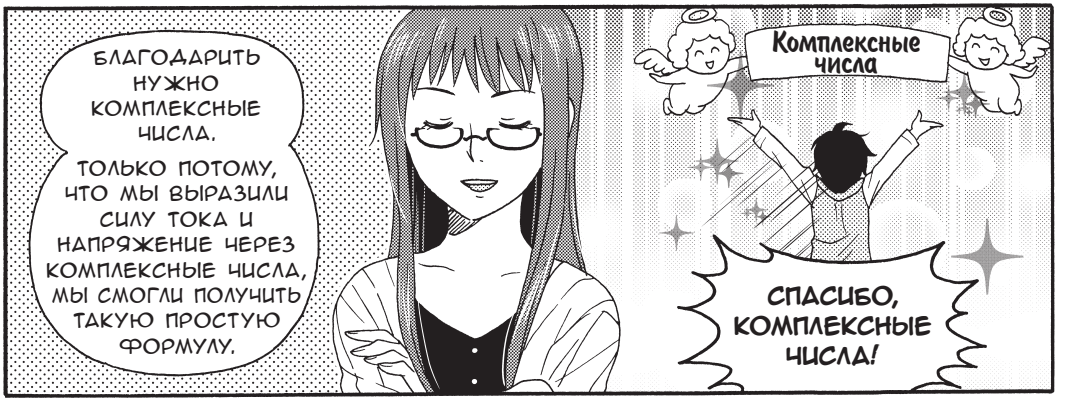
Действительно.

$$Lj\omega I_m e^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega LI$$

А значит, вот что мы получаем в итоге.



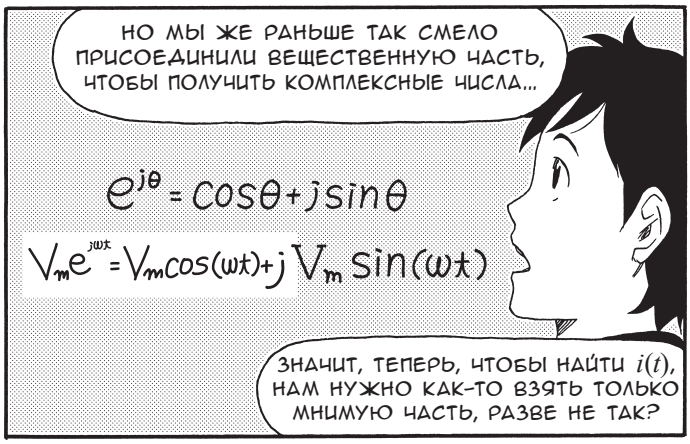
$$RI + j\omega LI = V$$



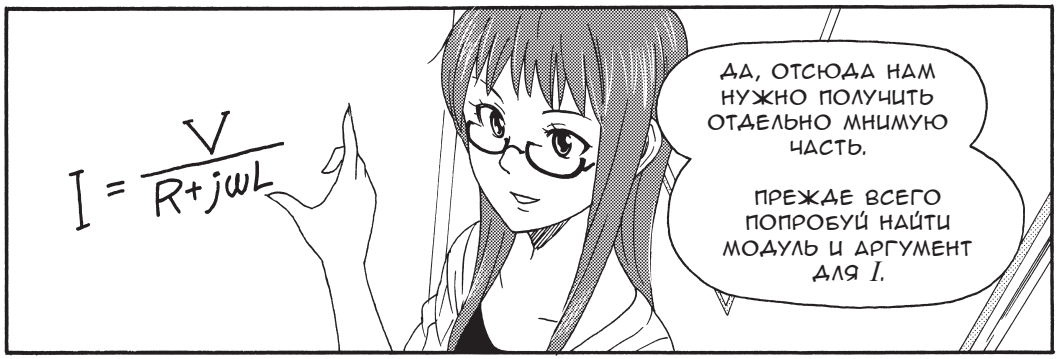
$$(R + j\omega L)I = V$$

$$I = \frac{V}{R + j\omega L}$$







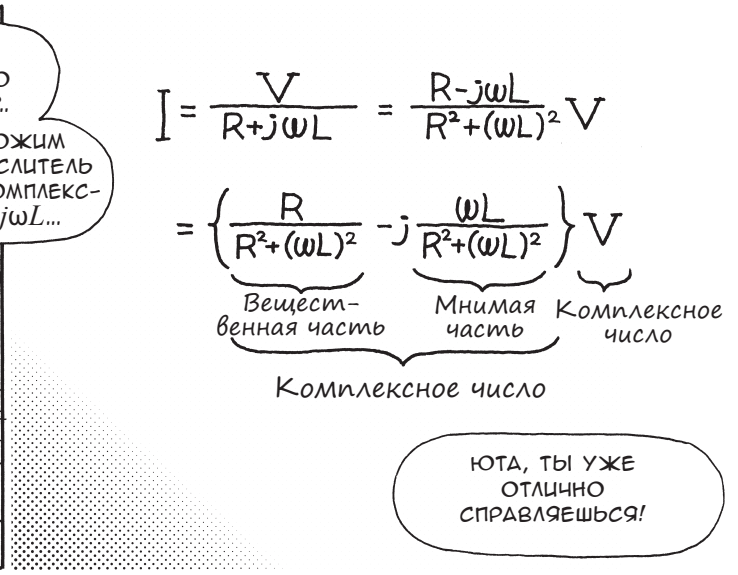




$$I = \frac{V}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} V$$

$$= \left\{ \underbrace{\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}}_{\text{Вещественная часть}} - j \underbrace{\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}}_{\text{Мнимая часть}} \right\} \underbrace{V}_{\text{Комплексное число}}$$

Комплексное число





А теперь попробуй найти модуль *I*.



Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей – |*Z*.1·*Z*.2| = |*Z*.1|·|*Z*.2|, а поэтому:

$$
\begin{aligned}
\left|I\right| &= \sqrt{\left\{\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}\right\}^2+\left\{\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right\}^2}\left|V\right| \\
&= \sqrt{\frac{R^2+(\omega L)^2}{\left\{R^2+(\omega L)^2\right\}^2}}\left|V_m e^{j\omega t}\right| \\
&= \sqrt{\frac{1}{R^2+(\omega L)^2}}V_m\left|e^{j\omega t}\right| \\
&= \sqrt{\frac{1}{R^2+(\omega L)^2}}V_m\sqrt{\cos^2(\omega t)+\sin^2(\omega t)} \\
&= \frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sqrt{1} \\
&= \frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}.
\end{aligned}
$$



Отлично!
Но посмотри-ка на исходную формулу, так как |*Z*.2/*Z*.1| = |*Z*.2|/|*Z*.1|, то проще по отдельности вычислить модули числителя и знаменателя:

$$
\begin{aligned}
\left|I\right| &= \left|\frac{V}{R+j\omega L}\right| \\
&= \frac{\left|V\right|}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \\
&= \frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}.
\end{aligned}
$$



Так просто! Хорошо бы Вы сразу рассказали мне об этом способе...



Прости, я подумала, что так ты лучше запомнишь. А теперь попробуй вычислить аргумент.



Аргумент вычисляется по формуле:
$\angle Z = \tan^{-1}\cdot$(мнимая часть/вещественная часть), а значит:

$$\begin{aligned}\angle I &= \tan^{-1}\left(\frac{\dfrac{-V\omega L}{R^2+(\omega L)^2}}{\dfrac{VR}{R^2+(\omega L)^2}}\right)\\ &= \tan^{-1}\left(\frac{-\omega L}{R}\right)\\ &= -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right).\end{aligned}$$



И опять всё отлично! Но и тут можно вычислить проще:

$$\begin{aligned}\angle I &= \angle\left(\frac{V}{R+j\omega L}\right)\\ &= \angle V - \angle(R+j\omega L)\\ &= 0-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\\ &= -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right).\end{aligned}$$



А что, $\angle V = 0$?



Да. Исходная формула напряжения была $V_m\sin(\omega t)$, так? В отличие от силы тока, под знаком sin нет слагаемого φ, а значит, сдвиг относительно ωt равен 0.



Ну, теперь всё готово, чтобы выделить мнимую часть:

$$I = \left|I\right| e^{j\angle I}$$



Вспомни экспоненциальную форму комплексного числа. И, используя найденные только что значения модуля и аргумента, попробуй вывести экспоненциальную форму.

СИЛА ТОКА, ВЫРАЖЕННАЯ ЧЕРЕЗ КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО, ПОЛУЧИЛАСЬ: $I = I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$.

А ТАК КАК В ЭТОЙ ФОРМУЛЕ $|I| = I_m$ И $\angle I = \varphi$, ТО ПОЛУЧИМ:

$$\dot{I} = I_m e^{j(\omega t+\varphi)} = |\dot{I}| e^{j(\omega t+\angle \dot{I})} = |\dot{I}| e^{j\omega t} e^{j\angle \dot{I}}$$

$$= \frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} e^{j\omega t} e^{j\left(-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} e^{j\left(\omega t-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)}$$

ЭТА ФОРМУЛА... У МЕНЯ УЖЕ ГОЛОВА КРУГОМ...

ЕЩЁ СОВСЕМ НЕМНОГО. ТЕПЕРЬ НУЖНО ПРИМЕНИТЬ ФОРМУЛУ ЭЙЛЕРА И ПРИВЕСТИ К ВИДУ СУММЫ sin И cos.

Применяем формулу Эйлера:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

...ПОЛУЧИЛОСЬ! РАЗДЕЛИЛИ ВЕЩЕСТВЕННУЮ И МНИМУЮ ЧАСТИ!

$$\underbrace{\frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \cos\left(\omega t-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)}_{\text{Вещественная часть}} + j \underbrace{\frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \sin\left(\omega t-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)}_{\text{Мнимая часть}}$$

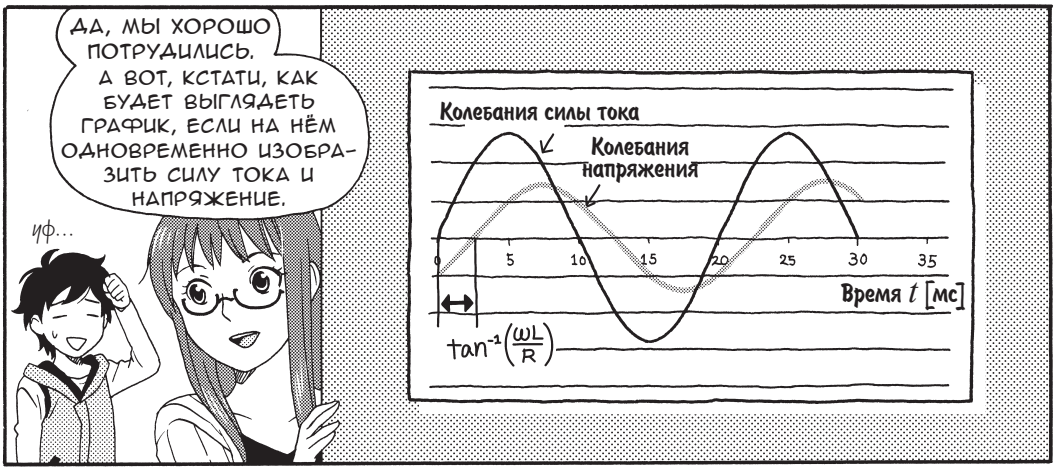
ТЕПЕРЬ, ЕСЛИ ОТБРОСИТЬ ВЕЩЕСТВЕННУЮ ЧАСТЬ И ВЗЯТЬ ТОЛЬКО МНИМУЮ, ТО ЭТО И БУДЕТ ИСКОМОЕ $i(t)$. ОДНАКО, ТАК КАК В ВИДЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА МЫ ПРЕДСТАВЛЯЛИ ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЕ, ПИКОВЫЙ ТОК БУДЕТ В $\sqrt{2}$ РАЗА БОЛЬШЕ.

СЛЕДОВАТЕЛЬНО...

$$i(t) = \sqrt{2} \frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \sin\left(\omega t-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$

ЭТО И ЕСТЬ ОКОНЧАТЕЛЬНЫЙ ОТВЕТ, ЧЕМУ РАВНА СИЛА ТОКА $i(t)$, ДА?

ДА, И ЭТА ФОРМУЛА ПОКАЗЫВАЕТ, КАК ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК ИЗМЕНЯЕТСЯ ПО СИНУСОИДЕ.



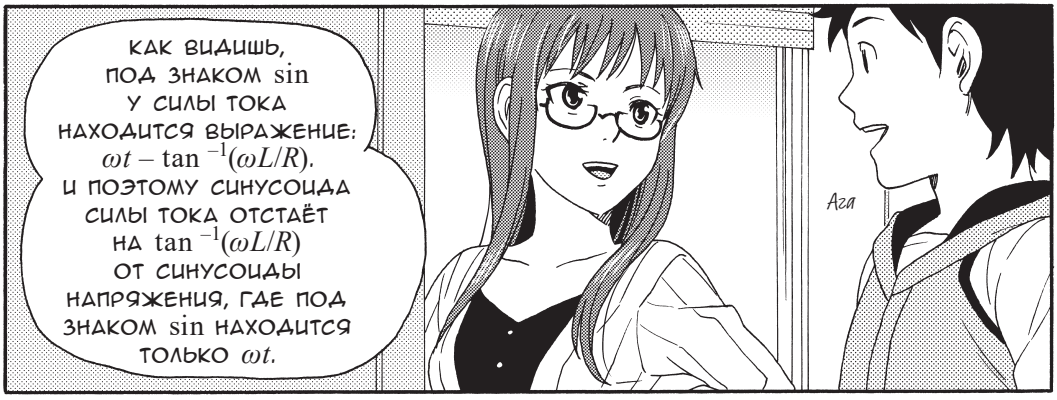


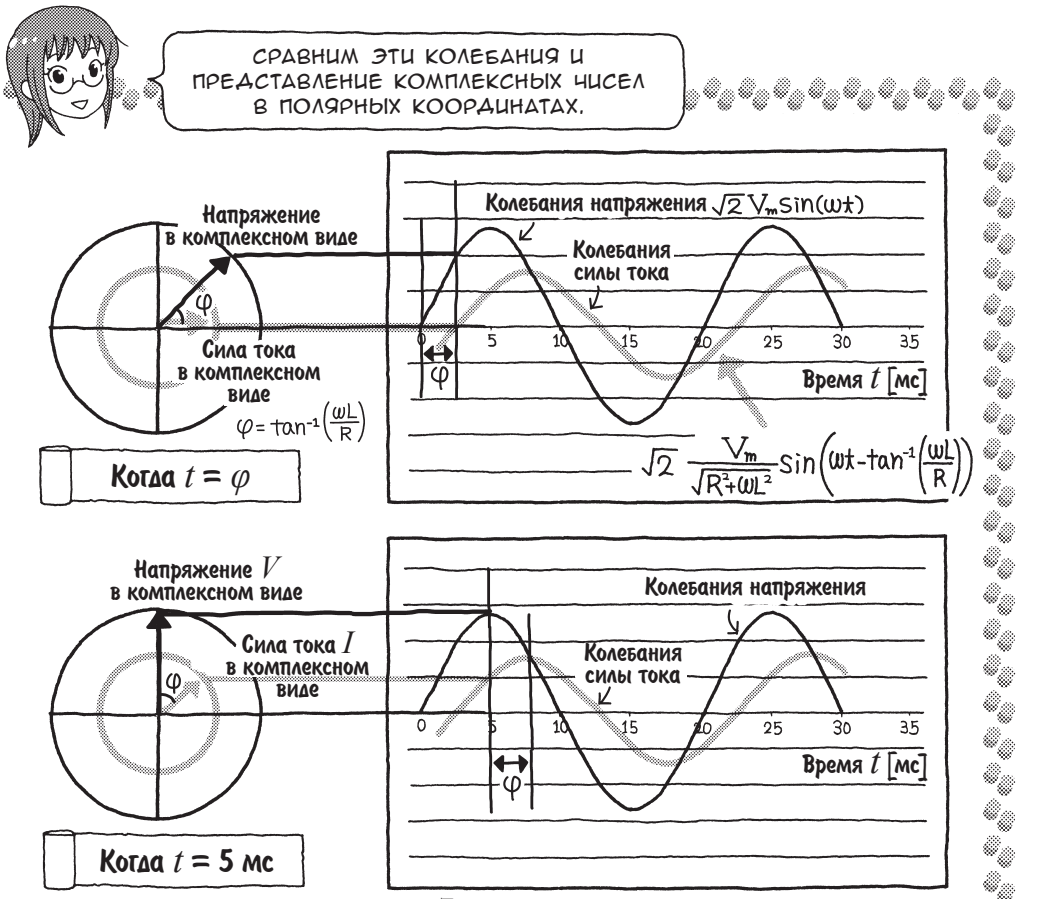
Колебания напряжения:

$$v(t)=\sqrt{2}\,V_m \sin(\omega t)$$

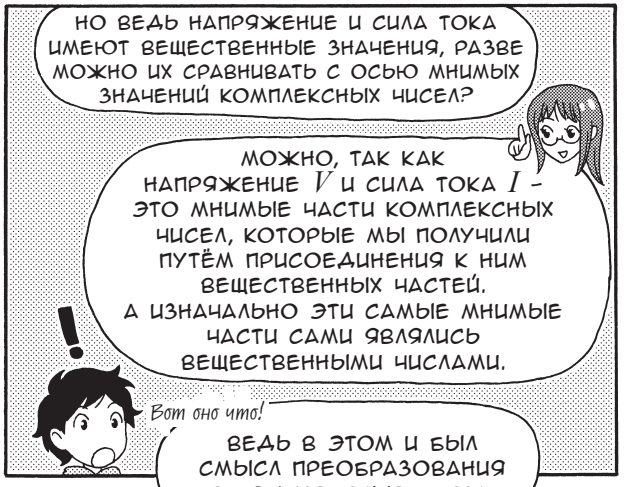
Колебания силы тока:

$$i(t)=\sqrt{2}\,\frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin\left(\omega t-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$





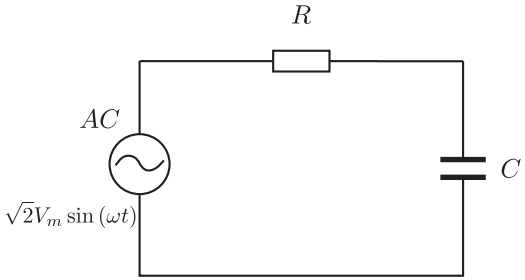
На правом графике пиковое значение напряжения равно $\sqrt{2}V_m$, а на левом графике, где напряжение представлено комплексным числом, модуль равен V_m. Поэтому имейте в виду, что масштаб по вертикали на правом и левом графиках не совпадает.







Рассмотрим ещё один пример. На рисунке последовательно соединены резистор и конденсатор:





Это схема электрической цепи, да?



Работа данной электрической цепи описывается вот этой формулой:

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = \sqrt{2}V_m \sin(\omega t).$$



Теперь тут нет дифференциала, зато есть интеграл...



Функция e^x при интегрировании не изменяется, а значит:

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$ (интегральную константу игнорируем).



Подробные выкладки сейчас опустим, и просто подобно тому, как в уравнении с катушкой мы заменили (d/dt) на $j\omega$, здесь заменим интеграл на $1/(j\omega)$.



А теперь, снова используя V и I, попробуй данное уравнение электрической цепи преобразовать в алгебраическое.

$$RI + \frac{1}{j\omega C}I = V.$$



Так, да?!



Верно! Молодец!



А теперь попробуем решить это, теперь уже алгебраическое, уравнение:

$$
\begin{aligned}
\left(R+\frac{1}{j\omega C}\right) I &= V \\
I &= V\frac{1}{R+\frac{1}{j\omega C}} \\
&= V\frac{1}{R+\frac{1}{j\omega C}}\left(\frac{j\omega C}{j\omega C}\right) \\
&= V\frac{j\omega C}{j\omega CR+1} \\
&= V\frac{j\omega C}{1+j\omega CR}\left(\frac{1-j\omega CR}{1-j\omega CR}\right) \\
&= V\frac{j\omega C-j^2\omega^2C^2R}{1+\omega^2C^2R^2} \\
&= V\frac{j\omega C-(-1)\,\omega^2C^2R}{1+\omega^2C^2R^2} \\
&= V\frac{j\omega C+\omega^2C^2R}{1+\omega^2C^2R^2} \\
&= V\frac{\omega^2C^2R+j\omega C}{1+\omega^2C^2R^2}.
\end{aligned}
$$



Ага, в процессе мы преобразовали уравнение, домножив на сопряжённое комплексное число $1-j\omega CR$.



А сейчас, как и в прошлый раз, найдём модуль $|I|$ и аргумент $\angle I$ комплексного числа I.



Если нужно найти модуль дроби, содержащей комплексные числа, то в полярных координатах это будет выглядеть вот так:

$$\begin{aligned}\left|Z\right| &= \left|\frac{a+jb}{c+jd}\right| \\ &= \left|\frac{\sqrt{a^2+b^2}e^{j\theta_1}}{\sqrt{c^2+d^2}e^{j\theta_2}}\right| \\ &= \left|\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}\right|\left|\frac{e^{j\theta_1}}{e^{j\theta_2}}\right| \\ &= \left|\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}\right|\left|\frac{\cos\theta_1+j\sin\theta_1}{\cos\theta_2+j\sin\theta_2}\right| \\ &= \left|\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}\right|.\end{aligned}$$

$$\left|\cos\theta_1+j\sin\theta_1\right| = \sqrt{\left(\cos\theta_1\right)^2+\left(\sin\theta_1\right)^2} = 1.$$

Кроме того, $\theta_1 = \tan^{-1}(b/a)$. Аналогично вычисляется и θ_2.



Ага, ага, понимаю.



Итак, вычисли теперь $|I|$.



Используя предыдущую формулу, получаем...

$$\left|I\right| = \left|V\frac{j\omega C}{1+j\omega CR}\right| = \frac{\omega C}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}V_m\,,$$

где $|V| = V_m$.



Вот решение!



Получается, что $|j\omega C| = \omega C$.



Хорошо. Теперь очередь аргумента $\angle I$. Аргумент (фазовый угол) дроби, содержащей комплексные числа, рассчитывается вот так:

$$\begin{aligned}
\angle Z &= \angle\left(\frac{a+jb}{c+jd}\right) \\
&= \angle\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}e^{j\theta_1}}{\sqrt{c^2+d^2}e^{j\theta_2}}\right) \\
&= \angle\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}e^{j(\theta_1-\theta_2)}\right) \\
&= \theta_1-\theta_2 \\
&= \angle(a+jb)-\angle(c+jd) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{d}{c}\right).
\end{aligned}$$



Ага, попробую вычислить.

$$\begin{aligned}
\angle I &= \angle\left(\frac{j\omega C}{1+j\omega CR}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{\text{мнимое число}}{\text{вещественное число}}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{\dfrac{\omega c}{1+\omega^2C^2R^2}}{\dfrac{\omega^2C^2R^2}{1+\omega^2C^2R^2}}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right).
\end{aligned}$$

Кроме того, найдём разницу между аргументом числителя и аргументом знаменателя:

$$\begin{aligned}
\angle I &= \angle(j\omega c)-\angle(1+j\omega cR) \\
&= \frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(\omega cR)
\end{aligned}$$

(так как у числа $j\omega C$ есть только мнимая часть, то оно находится на оси мнимых чисел, а следовательно, его аргумент равен $\pi/2$).



Получилось!



Аргумент ты тоже вычислил без единой ошибки, молодец! Осталось только подвести итоги. Опять же, модуль комплексного числа выражает действующее значение, то есть нужно снова умножить на $\sqrt{2}$...

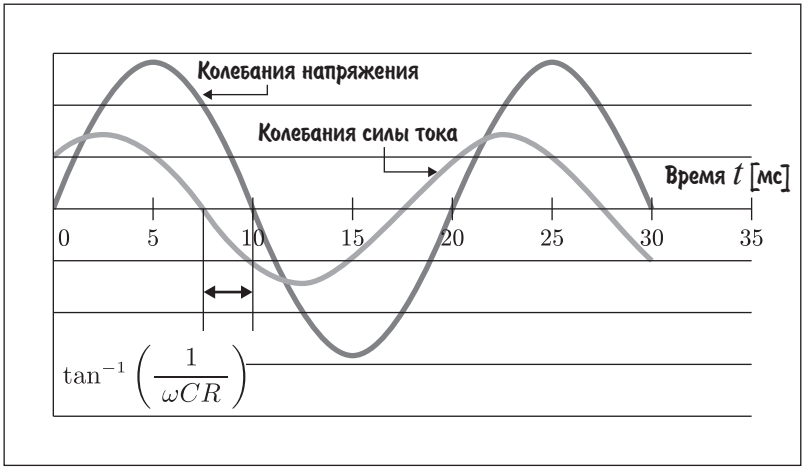
$$i\,(t) = \sqrt{2}\frac{\omega C}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}V_m\sin\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)\right).$$



Вот так будет выглядеть уравнение силы тока.



А вот как будут выглядеть на графике напряжение и сила тока этой электрической цепи:





В этот раз сила тока появляется раньше, чем напряжение, да?

$v\,(t) = \sqrt{2}V_m\sin(\omega t)$ – колебания напряжения;

$i\,(t) = \sqrt{2}\frac{\omega C}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}V_m\sin\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)\right)$ – колебания силы тока.



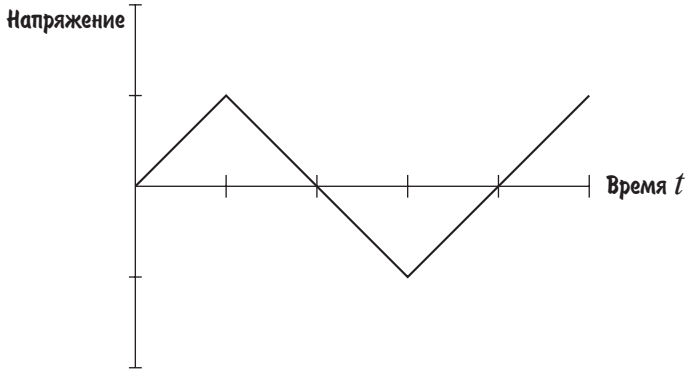
Верно. Как видно из уравнения силы тока, под знаком sin находится выражение $\omega t + \tan^{-1}[1/(\omega CR)]$. И поэтому синусоида силы тока опережает на $\tan^{-1}[1/(\omega CR)]$ синусоиду напряжения, где под знаком sin находится только ωt.

Таблица уравнений колебаний силы тока и напряжения и их представления в комплексной форме

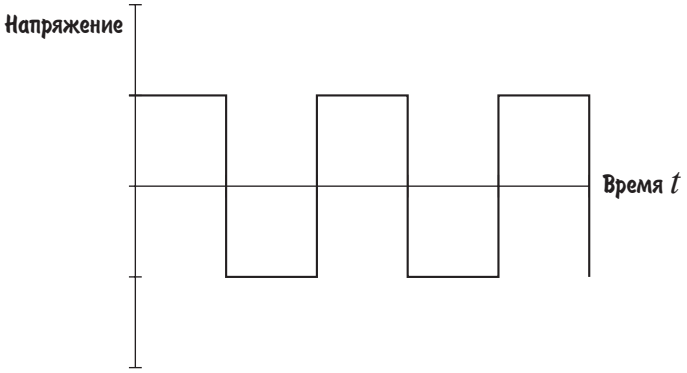
Уравнения колебаний (в момент времени t)	Уравнения в комплексной форме (без t)
Напряжение: $\sqrt{2}V_m \sin(\omega t)$, $\sqrt{2}V_m \sin(\omega t + \theta_1)$ и т. д., где V_m – действующее значение	Напряжение: $V = \|V\|$ (если фаза 0) или $V = a + jb = \left\|V\right\| e^{j\theta_1} = V_m e^{j\theta_1} = \left\|V\right\| \angle\theta_1 = V_m \angle\theta_1$, где a и b – вещественные числа, j – мнимое число, фаза равна θ_1, а модуль (абсолютная величина) является действующим значением
Сила тока: $\sqrt{2}I_m \sin(\omega t + \theta_2)$ и т. д., где I_m – действующее значение	Сила тока: $I = c + jd = \left\|I\right\| e^{j\theta_2} = I_m e^{j\theta_2} = \left\|I\right\| \angle\theta_2 = I_m \angle\theta_2$, где c и d – вещественные числа, j – мнимое число, фаза равна θ_2, а модуль (абсолютная величина) является действующим значением
Сопротивление: R [Ω] (Ом) Индуктивность: L [H] (генри) Электрическая ёмкость: C [F] (фарад)	Сопротивление: R [Ω] (Ом) Индуктивность: L [H] (генри) Электрическая ёмкость: C [F] (фарад)
$\frac{d}{dt}$ (дифференцирование по времени)	$j\omega$
$\int dt$ (интегрирование по времени)	$\frac{1}{j\omega}$
Уравнения, содержащие такие показатели, как размах колебания (амплитуда), угловая частота $\omega = 2\pi f$, время t, угол (фазовый угол) θ_1, дифференциал, интеграл и так далее	Нет ничего, кроме модуля комплексного числа (абсолютной величины), равного действующему значению, и фазового угла (аргумента θ_1 или θ_2). Нет элементов, связанных со временем t (ωt, d/dt, $\int dt$)

Представленные в таблице уравнения в комплексной форме можно использовать только тогда, когда колебания напряжения и силы тока синусоидальные.

В случае же колебаний треугольной или прямоугольной формы комплексную форму уравнений использовать нельзя.



Колебания треугольной формы



Колебания прямоугольной формы


1
Сложное уравнение, содержащее дифференциал или интеграл
2
Преобразовываем в комплексную форму. Убираем циклическую частоту и время (на время забываем о них). Модуль равен действующему значению
3
Решаем алгебраическое уравнение. Вычисляем модуль и аргумент комплексного числа
4
Включая циклическую частоту и время, возвращаемся к исходным колебаниям. (пиковое значение колебаний в √2 раза больше действующего значения)
5
Получаем уравнение колебаний, которое гораздо проще, чем исходное уравнение с дифференциалом или интегралом.
А ТЕПЕРЬ ПОДЫТОЖИМ ВСЁ, ЧТО МЫ СЕГОДНЯ ДЕЛАЛИ.
КОГДА В УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА, ВХОДЯТ СЛОЖНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ВРОДЕ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ЧАСТОТЫ, ДИФФЕРЕНЦИАЛА, ИНТЕГРАЛА И ТАК ДАЛЕЕ...
...ТО УДОБНО ПРЕОБРАЗОВАТЬ ТАКОЕ УРАВНЕНИЕ В КОМПЛЕКСНУЮ ФОРМУ.
СДЕЛАВ ЭТО, ИГНОРИРУЕМ ВРЕМЕННО ЦИКЛИЧЕСКУЮ ЧАСТОТУ И ПАРАМЕТР ВРЕМЕНИ И РЕШАЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ.
А В КОНЦЕ ВОЗВРАЩАЕМСЯ К ИСХОДНОМУ УРАВНЕНИЮ...
АГА, СДЕЛАВ НЕОБХОДИМЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ, МОЖНО УЖЕ НЕ РЕШАТЬ УРАВНЕНИЕ, СОДЕРЖАЩЕЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ИЛИ ИНТЕГРАЛ.
ВОТ ОНА – СИЛА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ!

3. ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЕ СЕТЕВОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Наверняка среди вас, дорогие читатели, есть те, кто думает, что используемое нами в быту напряжение равно 100 В*, но пиковое сетевое напряжение на самом деле равно $\sqrt{2}\cdot 100 = 141{,}42$ В. А что же тогда такое 100 В? Это действующее значение. Действующее значение переменного напряжения в 100 В означает, что данное переменное напряжение даёт такой же эффект (выполняет такую же работу), как постоянное напряжение в 100 В. Другими словами, при подсоединении к одинаковому резистору (например, к электрическому чайнику) переменное напряжение в 100 В даст такое же количество тепла, как и постоянное напряжение в 100 В. А следовательно, если на этом одинаковом количестве тепла вскипятить одинаковый объём воды, то для её кипячения потребуется одинаковое количество времени и постоянному напряжению в 100 В, и переменному, с действующим значением 100 В.

4. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Стандартное переменное напряжение и переменный ток колеблются по синусоиде. Но между этими колебаниями может быть интервал во времени. Другими словами, синусоида напряжения может опережать синусоиду силы тока или отставать от неё. И дальше я объясню, что это означает.

В электрической цепи, где последовательно присоединены резистор и конденсатор, если напряжение равно $\sqrt{2}V_m\sin(\omega t)$, то сила тока будет равна:

$$i(t) = \sqrt{2}\frac{\omega C}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}V\sin\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)\right).$$

Изобразим это в виде синусоиды и в комплексных координатах, как на графике ниже. В момент времени $t = 0$ напряжение тоже равно 0. Однако сила тока не нулевая, она опережает напряжение на величину $\varphi = \tan^{-1}[1/(\omega CR)]$. Так же и на левом графике сила тока в комплексных координатах опережает напряжение в комплексных координатах, то есть идёт впереди по направлению против часовой стрелки. Это состояние называется отставанием фазы напряжения от фазы тока.

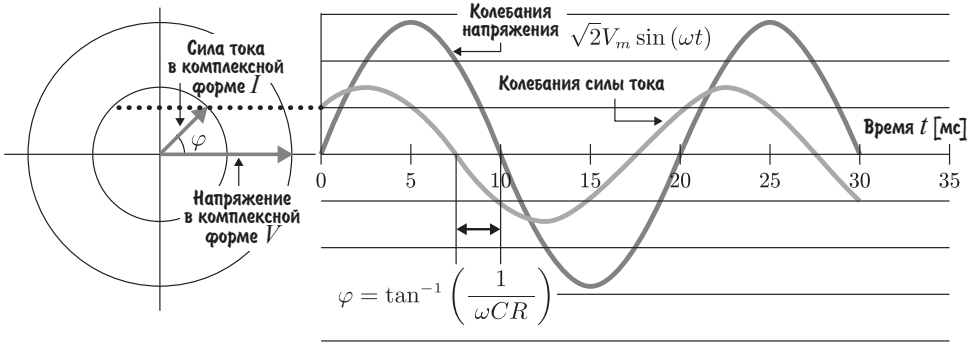
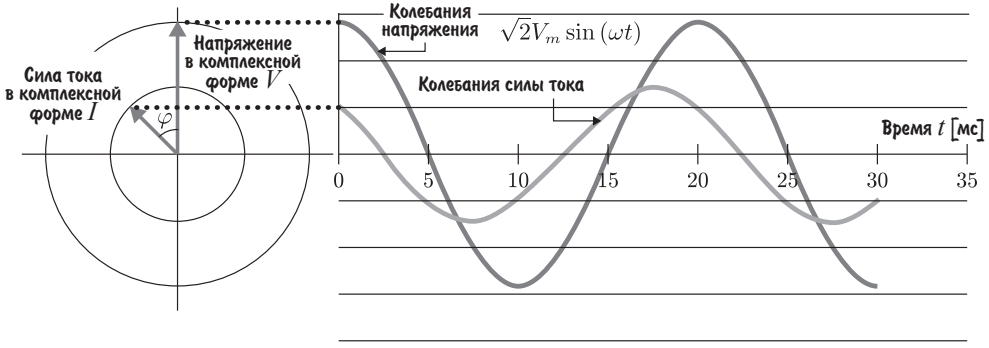


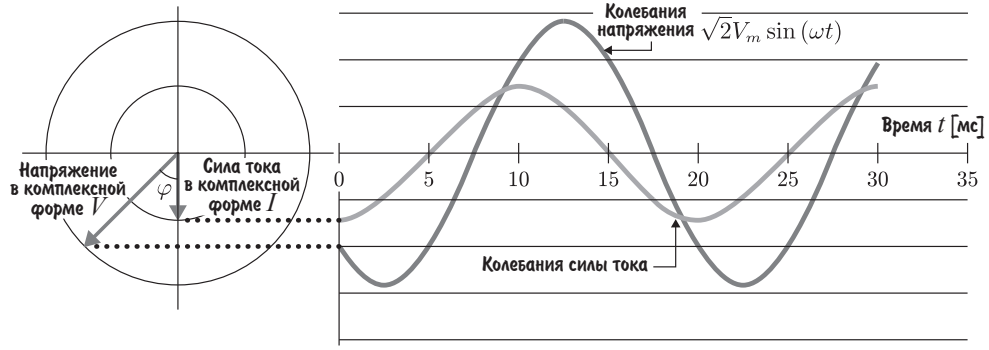
График колебаний тока и напряжения при последовательном подсоединении резистора и конденсатора

*100 В – стандартное сетевое напряжение в Японии.

А теперь представим на графике ситуацию через 5 с после той, что рассмотрена выше. Тут напряжение достигает своего пикового значения и в комплексной форме направлено вертикально вверх, но всё равно сила тока в комплексной форме опережает напряжение на φ по направлению против часовой стрелки.



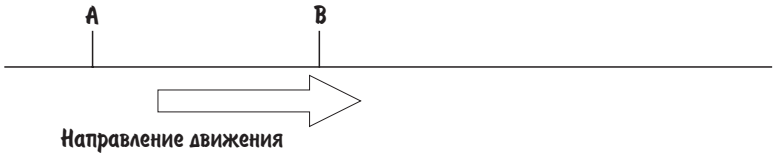
На этот раз рассмотрим ситуацию ещё через 7,5 с. Напряжение в комплексной форме оказывается в 3-м квадранте, а сила тока в комплексной форме направлена вертикально вниз. Но и в этом случае всё-таки колебания силы тока опережают колебания напряжения.



Когда речь идёт о сравнении двух колебаний, специалисты спорят, что считать опережением, а что – отставанием. Если говорить только о самих синусоидах, то, сравнивая пиковые значения колебаний силы тока и напряжения, мы видим, что пик напряжения находится правее, и можем подумать, что поэтому колебания напряжения опережают колебания силы тока. Потому что мы с детства привыкли к понятию числовой оси, где то, что находится правее, больше по значению. Однако если эти же колебания рассматривать в комплексной форме, то ошибки быть не может, так как опережающим является то, которое раньше поворачивается по направлению против часовой стрелки.

Кроме того, до этого в рассматриваемом примере мы взяли за основу колебания напряжения и поэтому говорили, что колебания силы тока опережают напряжение. А если бы мы взяли за основу колебания силы тока, то говорили бы, что колебания напряжения отстают от колебаний силы тока. Таким образом, также имеет значение то, что взять за основу. И подобных явлений в реальной жизни много.

Рассмотрим простой пример, когда в беге соревнуются два спортсмена A и B. Их относительное положение отражено на графике:



Если направление движения вправо, то относительно спортсмена A спортсмен B обгоняет (идёт впереди). Однако относительно спортсмена B спорстмен A отстаёт (следует за ним). То есть их положения относительны.

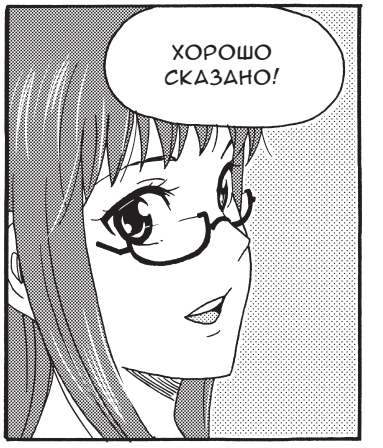
Способность правильно определять для синусоид, какая опережающая, а какая отстающая, приходит с опытом. Поэтому нужно решить много задач на данную тему, чтобы приобрести этот навык.

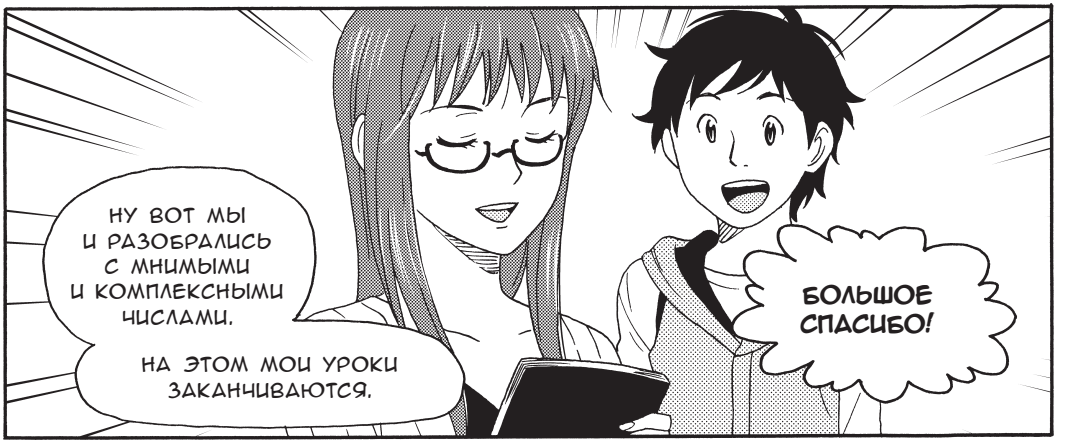
Когда речь идёт о переменном токе, то за основу часто берут напряжение, относительно которого рассматривают силу тока. Причина этого в том, что часто используют так называемый идеальный источник напряжения, который может поддерживать определённое значение напряжения. Примером такого источника напряжения является батарейка. У такого источника напряжения (батарейки), если к нему ничего не присоединено (разомкнутое состояние) и ток не течёт, напряжение на обоих концах фиксировано. В разомкнутом состоянии потери малы, а эффективность высока.

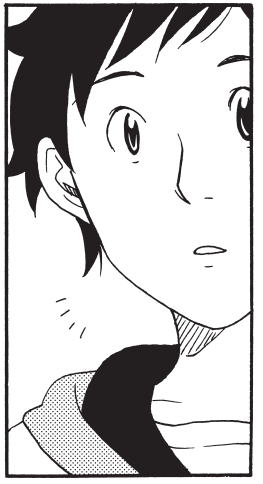
Однако существует и так называемый идеальный источник тока, который поддерживает всегда постоянное значение силы тока. В разомкнутом состоянии сила тока равна 0, но когда начинает проходить ток с одинаковым значением, то напряжение на концах источника тока будет постоянно возрастать. Следовательно, если затем источник отключить (разомкнуть цепь), то напряжение будет высоким, и это может быть даже опасно. Кроме того, бывают ситуации, когда из электрической цепи, к которой присоединено много источников напряжения, источников тока и резисторов, нужно отсоединить источник тока. Другими словами, бывают ситуации, когда нам нужно рассмотреть электрическую цепь с отключённым источником тока. Но в момент отключения источника тока произойдёт короткое замыкание, что приведёт к бесполезному росту силы тока и падению эффективности.

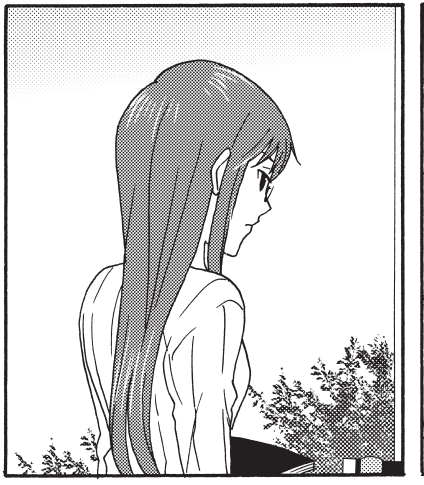
Поэтому часто используются источники напряжения, которые поддерживают постоянное значение напряжения (хотя бывают и ситуации, когда нужны источники тока). К тому же используемые в бытовых сетях источники электроэнергии таковы, что при действующем напряжении в 100 В сила тока в сети меняется в зависимости от сопротивления подключаемых к сети объектов (так как речь о переменном токе, то точнее будет сказать: в зависимости от полного сопротивления). Поэтому когда речь идёт об электрических сетях, то, беря за основу фазу напряжения, всё же часто спорят о том, запаздывает или опережает фаза тока по сравнению с фазой напряжения.


ПОЛУЧАЕТСЯ, ЧТО СОЗДАННОЕ ВООБРАЖЕНИЕМ МНИМОЕ ЧИСЛО ОКАЗЫВАЕТСЯ УДОБНЫМ СРЕДСТВОМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ РЕАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ.
Формула Эйлера
Математика
Число Непера и его применение
Комплексные числа ②
Комплексные числа ①

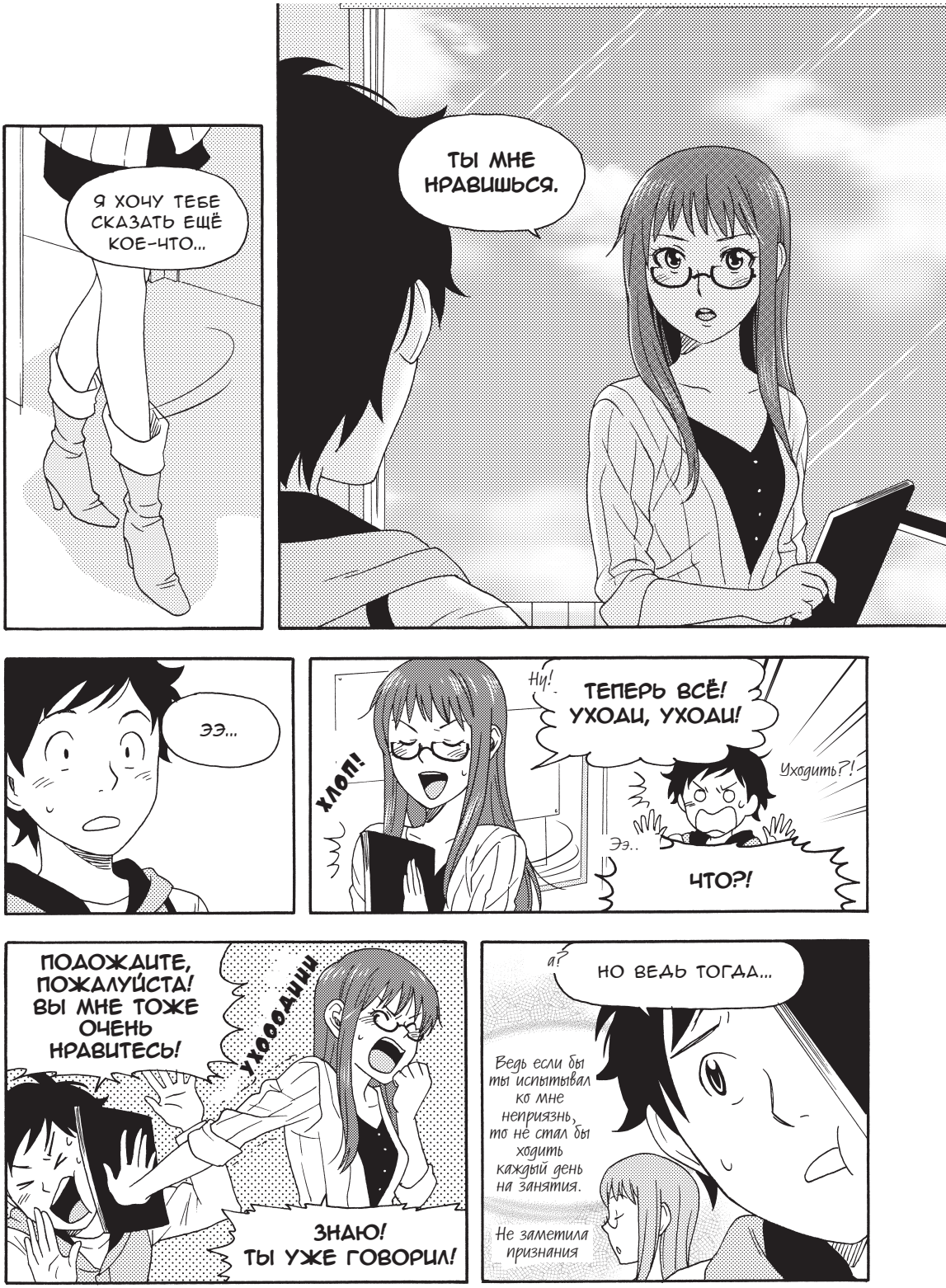

ХОРОШО СКАЗАНО!

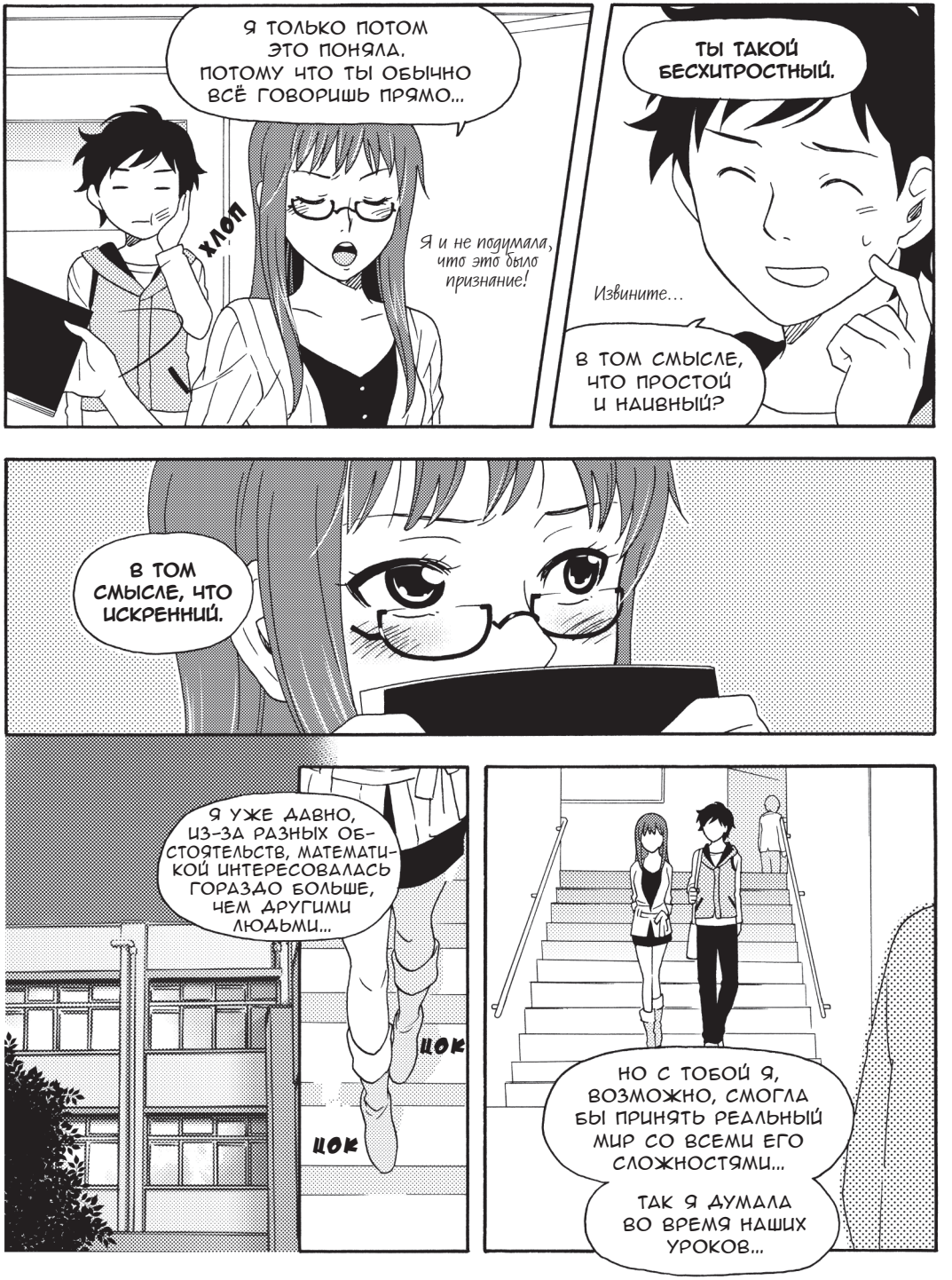

НУ ВОТ МЫ И РАЗОБРАЛИСЬ С МНИМЫМИ И КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ.
НА ЭТОМ МОИ УРОКИ ЗАКАНЧИВАЮТСЯ.
БОЛЬШОЕ СПАСИБО!

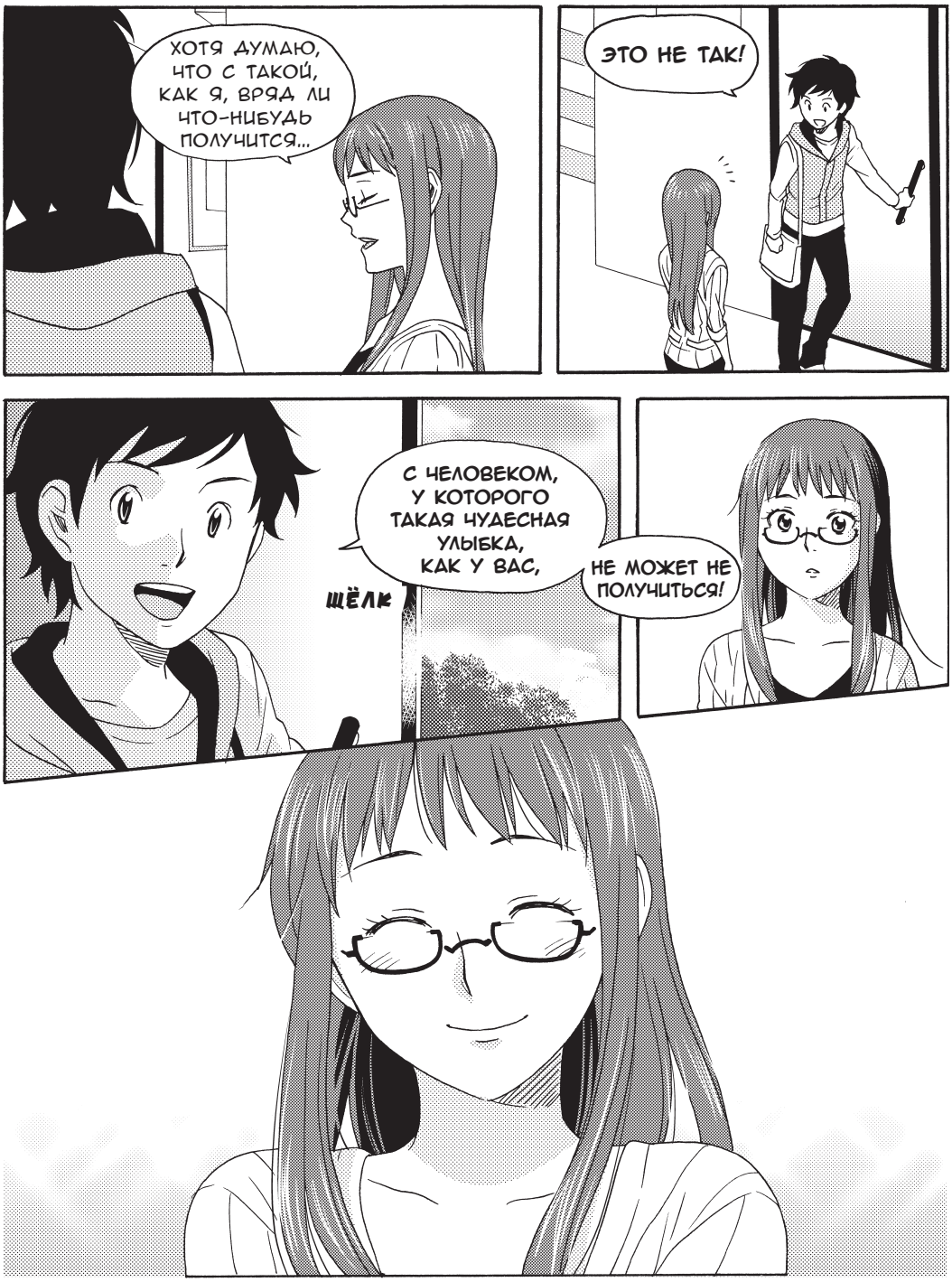


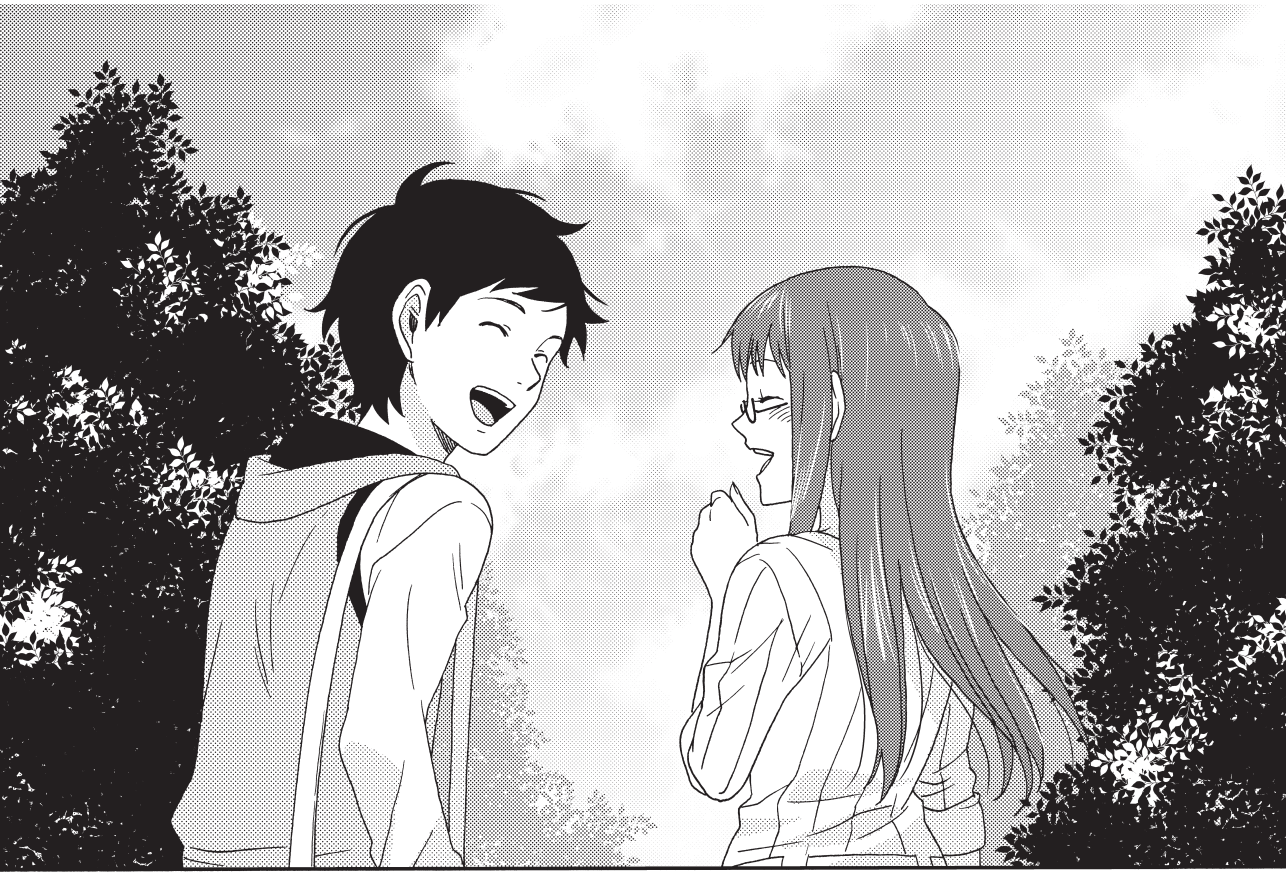


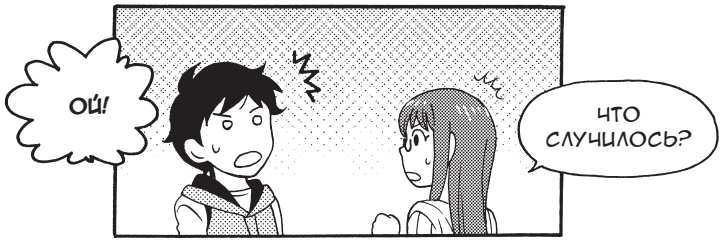

ХИМУРО-САН? Я...
ПОДОЖДИ...


Я ХОЧУ ТЕБЕ СКАЗАТЬ ЕЩЁ КОЕ-ЧТО...
ТЫ МНЕ НРАВИШЬСЯ.
ЭЭ...
ХЛОП!
Ни!
ТЕПЕРЬ ВСЁ! УХОДИ, УХОДИ!
Уходить?!
Ээ..
ЧТО?!
ПОДОЖДИТЕ, ПОЖАЛУЙСТА! ВЫ МНЕ ТОЖЕ ОЧЕНЬ НРАВИТЕСЬ!
УХОДИНЦИ
ЗНАЮ! ТЫ УЖЕ ГОВОРИЛ!
а?
НО ВЕДЬ ТОГДА...
Ведь если бы ты испытывал ко мне неприязнь, то не стал бы ходить каждый день на занятия.
Не заметила признания


Я только потом это поняла, потому что ты обычно всё говоришь прямо...
ХЛОП
Я и не подумала, что это было признание!
ТЫ ТАКОЙ БЕСХИТРОСТНЫЙ.
Извините...
В ТОМ СМЫСЛЕ, ЧТО ПРОСТОЙ И НАИВНЫЙ?
В ТОМ СМЫСЛЕ, ЧТО ИСКРЕННИЙ.
Я УЖЕ ДАВНО, ИЗ-ЗА РАЗНЫХ ОБСТОЯТЕЛЬСТВ, МАТЕМАТИКОЙ ИНТЕРЕСОВАЛАСЬ ГОРАЗДО БОЛЬШЕ, ЧЕМ ДРУГИМИ ЛЮДЬМИ...
ЦОК
ЦОК
НО С ТОБОЙ Я, ВОЗМОЖНО, СМОГЛА БЫ ПРИНЯТЬ РЕАЛЬНЫЙ МИР СО ВСЕМИ ЕГО СЛОЖНОСТЯМИ...
ТАК Я ДУМАЛА ВО ВРЕМЯ НАШИХ УРОКОВ...


ХОТЯ ДУМАЮ, ЧТО С ТАКОЙ, КАК Я, ВРЯД ЛИ ЧТО-НИБУДЬ ПОЛУЧИТСЯ...
ЭТО НЕ ТАК!
С ЧЕЛОВЕКОМ, У КОТОРОГО ТАКАЯ ЧУДЕСНАЯ УЛЫБКА, КАК У ВАС,
ЩЁЛК
НЕ МОЖЕТ НЕ ПОЛУЧИТЬСЯ!




ОЙ!
ЧТО СЛУЧИЛОСЬ?


ДЕРЖИСЬ!
Утешительная вечеринка
Разбитое сердце делает мужчину сильнее!
Я СОВСЕМ ЗАБЫЛ... ПРО СЕНПАЯ...

ПРИЛОЖЕНИЕ
УПРАЖНЕНИЯ

Задача 1. Преобразуйте следующие формулы в более простой вид. Здесь i – мнимая единица.

❶ $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{12} =$

❷ $\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)\left(\cos\frac{7\pi}{18}+i\sin\frac{7\pi}{18}\right) =$

❸ $\left(\cos\frac{2\pi}{15}+i\sin\frac{2\pi}{15}\right)\div\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right) =$

❹ Решите для $\theta = 20°$: $\dfrac{(\cos\theta+i\sin\theta)\,(\cos 7\theta+i\sin 7\theta)}{\cos 5\theta+i\sin 5\theta} =$

Задача 2. Приведенные ниже напряжения, выраженные в виде функций от времени, представьте в виде комплексных чисел. Используйте обозначение мнимого числа i и игнорируйте множитель $e^{i\omega t}$.

❶ $v = \sqrt{2}\sin(\omega t)$

❷ $v_1 = \sqrt{2}\,50\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$

❸ $v_2 = \sqrt{2}\,100\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)$

❹ $v_3 = \sqrt{2}\,200\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$

Задача 3. Сложите напряжения, выраженные функциями v_1 и v_2, используя тригонометрические формулы сложения. Полученную в результате функцию sin максимально упростите. Запишите результат ❶. Затем функции v_1 и v_2 преобразуйте по отдельности в комплексные числа и сложите, вернитесь к функции sin. Полученный результат ❷ и результат ❶ сравните между собой.

$$v_1 = 3\sqrt{2}\sin\omega t,\ v_2 = 4\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

❶ Вычислите, используя тригонометрические функции сложения:

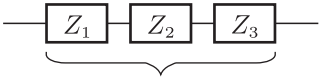
$$v_1 + v_2 \quad = \quad 3\sqrt{2}\sin\omega t + 4\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \quad =$$

❷ После преобразования в комплексные числа посчитайте их сумму. Вернитесь к функции sin:

$$V_1 + V_2 =$$

$$v_1 + v_2 \ =$$

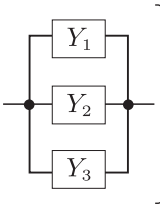
Задача 4. Даны три полных сопротивления (или импеданса, или комплексных сопротивления) $Z_1 = 2 + 3j$, $Z_2 = 1 + 9j$, $Z_3 = 4 - 7j$ (j – мнимая единица), соединенных последовательно. Вычислите совокупный импеданс Z_S, совокупный адмиттанс (комплексную проводимость) Y_S, а также их модули и аргументы. В случае переменного тока импеданс является отношением напряжения к силе тока (V/I), выраженным в комплексной форме, а адмиттанс является обратной величиной к импедансу. В случае последовательного соединения совокупный импеданс равен сумме всех импедансов.



Совокупный импеданс Z_S при последовательном соединении

❶ Совокупный импеданс $Z_S =$
❷ Модуль совокупного импеданса $|Z_S| =$
❸ Аргумент совокупного импеданса $\angle Z_S =$
❹ Совокупный адмиттанс $Y_S =$
❺ Модуль совокупного адмиттанса $|Y_S| =$
❻ Аргумент совокупного адмиттанса $\angle Y_S =$

Задача 5. Даны три адмиттанса $Y_1 = 5 + 2j$, $Y_2 = 4 - 9j$, $Y_3 = 1 + 6j$ (j – мнимая единица), соединеных параллельно. Вычислите совокупный импеданс Z_P, совокупный адмиттанс Y_P, а также их модули и аргументы. Адмиттанс является обратной величиной к импедансу. В случае параллельного соединения совокупный адмиттанс равен сумме всех адмиттансов.



Совокупный адмиттанс Y_P в условиях параллельного соединения

❶ Совокупный адмиттанс $Y_S =$
❷ Модуль совокупного адмиттанса $|Y_S| =$
❸ Аргумент совокупного адмиттанса $\angle Y_S =$
❹ Совокупный импеданс $Z_S =$
❺ Модуль совокупного импеданса $|Z_S| =$
❻ Аргумент совокупного импеданса $\angle Z_S =$

Задача 6. Исходя из данных уравнений с комплексными чиселами, выведите формулы для нахождения C_x и R_x. Другими словами, предположите, что в данном случае C_x и R_x являются неизвестными параметрами, а остальные парамены известны (j – мнимая единица).

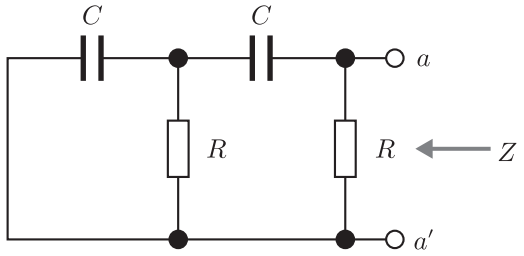
❶ $$R_3\left(\frac{1}{j\omega C_x} + R_x\right) = R_4\left(\frac{1}{j\omega C_1} + R_1\right)$$ Ответ: $C_x =$ $R_x =$

❷ $$\left(\frac{R_3\dfrac{1}{j\omega C_3}}{R_3 + \dfrac{1}{j\omega C_3}}\right)\left(\frac{1}{j\omega C_x} + R_x\right) = R_4\frac{1}{j\omega C_1}$$ Ответ: $C_x =$ $R_x =$

Задача 7. Дана система из двух уравнений первой степени. Найдите I_2. Другими словами, считаем, что I_1 и I_2 – неизвестные, а остальные параметры – известные (j – мнимая единица).

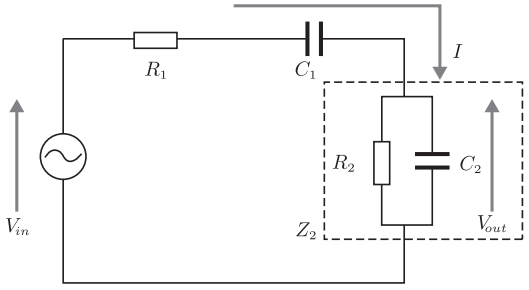
$$\begin{cases} \frac{1}{j\omega C} I_1 + R\left(I_1 - I_2\right) = V \\ R\left(I_2 - I_1\right) + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) I_2 = 0 \end{cases}$$

Задача 8. Исходя из схемы ниже, вычислите совокупный импеданс Z (влево от клемм a–a'). Обозначьте угловую частоту как ω, а мнимую единицу как j.



$Z = ?$

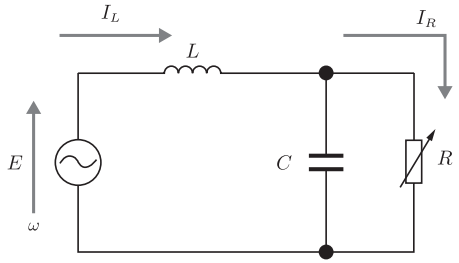
Задача 9. Исходя из схемы ниже, вычислите соотношение выходного напряжения V_{out} к входному напряжению V_{in}: $V_{\text{out}}/V_{\text{in}}$. Обозначьте угловую частоту как ω, а мнимую единицу как j.



$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = ?$$

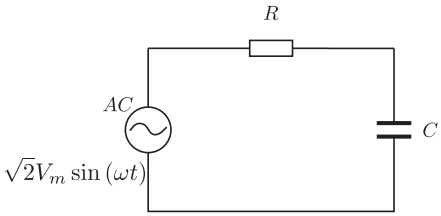
Если силу тока, проходящего по цепи, обозначить за I, то входное напряжение V_{in} можно вычислить как произведение общего импеданса цепи Z и силы тока I. Тогда как выходное напряжение V_{out} можно вычислить как произведение импеданса Z_2 (при параллельно соединённых R_2 и C_2) и силы тока I.

Задача 10. Посмотрите на представленную схему. Найдите такое условие, при котором действующее значение тока I_L, проходящего через катушку индуктивности L, не меняется, даже когда меняется значение переменного сопротивления R. Обозначим действующее значение напряжения источника питания за E, угловую частоту за ω, а мнимую единицу за j.



Условие?

Задача 11. Как показано на схеме, резистор R и конденсатор C последовательно соединены. Докажите, что $RI + (1/j\omega C)I = V$, где V – это комплексное напряжение, а I – это комплексная сила тока.



Последовательное соединение резистора и конденсатора

Решение задачи 1

❶
$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{12}$$
$$= (\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)^{12}$$
$$= \left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)^{12}$$
$$= \left(e^{i\frac{2}{3}\pi}\right)^{12}$$
$$= e^{i\frac{2}{3}\pi\times 12}$$
$$= e^{i8\pi}$$
$$= \left(e^{i2\pi}\right)^4$$
$$= (\cos 2\pi + i\sin 2\pi)^4$$
$$= (1)^4$$
$$= 1$$

❷
$$\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)\left(\cos\frac{7\pi}{18}+i\sin\frac{7\pi}{18}\right)$$
$$= e^{i\frac{\pi}{9}}e^{i\frac{7\pi}{18}}$$
$$= e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{7\pi}{18}\right)}$$
$$= e^{i\left(\frac{2+17}{18}\pi\right)}$$
$$= e^{i\left(\frac{9}{18}\pi\right)}$$
$$= e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= i$$

❸ $\left(\cos\frac{2\pi}{15}+i\sin\frac{2\pi}{15}\right)\div\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$

$$
\begin{aligned}
&= e^{i\left(\frac{2\pi}{15}\right)}\div e^{i\left(\frac{4\pi}{5}\right)}\\
&= e^{i\left(\frac{2\pi}{15}\right)}\times e^{-i\left(\frac{4\pi}{5}\right)}\\
&= e^{i\left(\frac{2\pi}{15}-\frac{4\pi}{5}\right)}\\
&= e^{i\left(\frac{2-4\times3}{15}\pi\right)}\\
&= e^{i\left(\frac{2-12}{15}\pi\right)}\\
&= e^{i\left(-\frac{10}{15}\pi\right)}\\
&= e^{i\left(-\frac{2}{3}\pi\right)}\\
&= \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\\
&= -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}
\end{aligned}
$$

❹ Если $\theta = 20°$: $\dfrac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos7\theta+i\sin7\theta)}{\cos5\theta+i\sin5\theta}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{i\theta}e^{i7\theta}}{e^{i5\theta}}\\
&= \frac{e^{i(1+7)\theta}}{e^{i5\theta}}\\
&= \frac{e^{i8\theta}}{e^{i5\theta}}\\
&= e^{i(8-5)\theta}\\
&= e^{i3\theta}\\
&= e^{i3\times20^\circ}\\
&= e^{i60^\circ}\\
&= \cos60^\circ+i\sin60^\circ\\
&= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}
\end{aligned}
$$

Решение задачи 2

❶ $v = \sqrt{2}\sin(\omega t)$. Комплексный вид: $V = 1$

❷ $v_1 = \sqrt{2}\,50\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{3}\right)$

Комплексный вид:

$$\begin{aligned} V_1 &= 50e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= 50\angle\frac{\pi}{3} \\ &= 50\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 50\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= 25 + 25\sqrt{3}i \end{aligned}$$

❸ $v_2 = \sqrt{2}\,100\sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{6}\right)$

Комплексный вид:

$$\begin{aligned} V_2 &= 100e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ &= 100\angle\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 100\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 100\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\ &= 50\sqrt{3} - 50i \end{aligned}$$

❹ $v_3 = \sqrt{2}\,200\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Так как $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\theta\cos\dfrac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\dfrac{\pi}{2} = \cos\theta\times 0 + \cos\theta\times 1 = \cos\theta$,

то с учётом того, что $\theta = \omega t - \dfrac{\pi}{4}$, можно выполнить следующее преобразование:

$$\begin{aligned}
\upsilon_3 &= \sqrt{2}\,200\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\\
&= \sqrt{2}\,200\sin\left(\omega t + \frac{-\pi + 2\pi}{4}\right)\\
&= \sqrt{2}\,200\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Комплексный вид:

$$\begin{aligned}
V_3 &= 200e^{i\frac{\pi}{4}}\\
&= 200\angle\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= 200\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\
&= 200\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\
&= 200\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\
&= 100\sqrt{2} + 100\sqrt{2}i\\
&= 100\sqrt{2}\,(1+i)
\end{aligned}$$

Комплексный вид (другое решение):

$$\begin{aligned}
\upsilon_3 &= \sqrt{2}\,200\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\\
V_3 &= 200e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = 200e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\\
&= 200\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= 200\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(0 + i\times 1)\\
&= 200\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)i\\
&= 200\left(\frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}i^2\right)\\
&= 200\left(\frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}\times(-1)\right)\\
&= 100\sqrt{2} + 100\sqrt{2}i\\
&= 100\sqrt{2}\,(1+i)
\end{aligned}$$

Решение задачи 3

❶ Вычисление с помощью тригонометрических формул сложения.

$$\begin{aligned}
v_1 + v_2 &= 3\sqrt{2}\sin\omega t + 4\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \\
&= 3\sqrt{2}\sin\omega t + 4\sqrt{2}\left(\sin\omega t\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\omega t\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&= 3\sqrt{2}\sin\omega t + 4\sqrt{2}\left(\sin\omega t\right)\frac{1}{2} + 4\sqrt{2}\left(\cos\omega t\right)\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 3\sqrt{2}\sin\omega t + 2\sqrt{2}\sin\omega t + 2\sqrt{6}\cos\omega t \\
&= 5\sqrt{2}\sin\omega t + 2\sqrt{6}\cos\omega t \\
&= \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{6}\right)^2}\left(\frac{5\sqrt{2}\sin\omega t + 2\sqrt{6}\cos\omega t}{\sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{6}\right)^2}}\right) \\
&= \sqrt{50+24}\left(\frac{5\sqrt{2}\sin\omega t + 2\sqrt{6}\cos\omega t}{\sqrt{50+24}}\right) \\
&= \sqrt{74}\left(\sin\omega t\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{74}} + \cos\omega t\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{74}}\right).
\end{aligned}$$

Используя $\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{74}}$, $\cos\theta = t\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{74}}$, $\tan\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$, получаем

$$\begin{aligned}
v_1 + v_2 &= \sqrt{74}\left(\sin\omega t\cos\theta + \cos\omega t\sin\theta\right) \\
&= \sqrt{74}\sin\left(\omega t + \theta\right),
\end{aligned}$$

где $\theta = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

❷ Преобразуем v_1 и v_2 в комплексные числа V_1 и V_2, складываем их, затем возвращаемся к функции sin. Модуль этих комплексных чисел будет равен действующим значениям напряжений, $e^{i\omega t}$ здесь игнорируем.

$$\begin{aligned}
V_1 + V_2 &= 3 + 4e^{i\frac{\pi}{3}} \\
&= 3 + 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 3 + 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= 3 + 2 + 2\sqrt{3}i \\
&= 5 + 2\sqrt{3}i.
\end{aligned}$$

Модуль: $\left|V_1 + V_2\right| = \sqrt{5^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{25 + 12} = \sqrt{37}$.

Аргумент: $\angle\left(V_1 + V_2\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\right)$.

Так как модуль напряжения в комплексном виде является его действующим значением, но умножим результат на $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= \sqrt{2}\left|V_1 + V_2\right| \sin\left(\omega t + \angle\left(V_1 + V_2\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\sqrt{37}\sin\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)\right) = \sqrt{74}\sin\left(\omega t + \theta\right), \end{aligned}$$

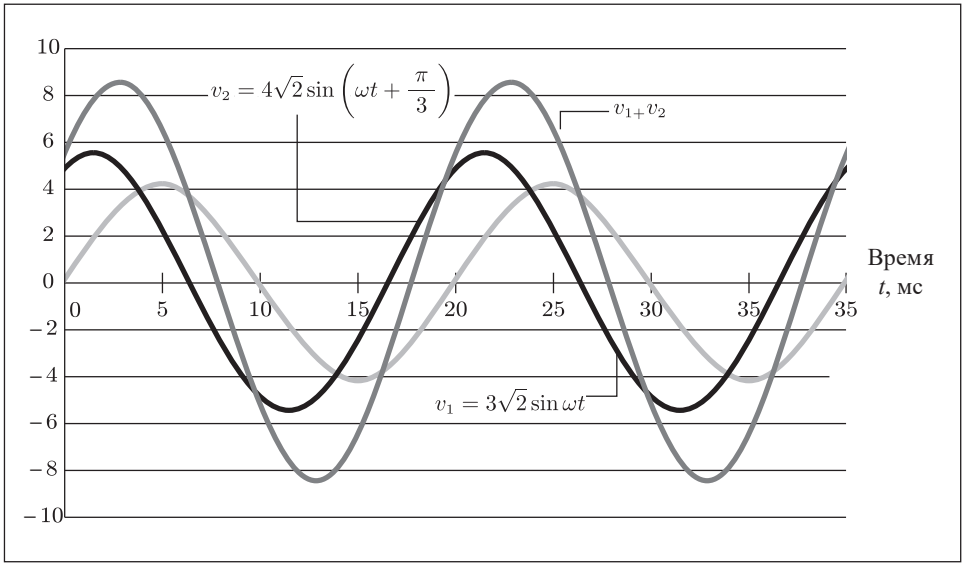
где $\theta = \tan^{-1}\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

Естественно, что результат ❶ вычислений с помощью тригонометрических формул сложения и результат ❷ после преобразования в комплексные числа, сложения комплексных чисел и возвращения к функции sin совпадают. Однако, по сравнению со сложением напряжений $v_1 + v_2$, при решении в комплексной форме вычислений было меньше, и они были проще.

На графике ниже представлены колебания напряжений

$$v_1 = 3\sqrt{2}\sin\omega t \quad \text{и} \quad v_2 = 4\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

и их суммы:



Решение задачи 4

Так как совокупный импеданс в условиях последовательного соединения равен сумме импедансов, то получим следующий результат.

Совокупный импеданс: $Z_s = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 2 + 3j + 1 + 9j + 4 - 7j = 7 + 5j.$

Модуль совокупного импеданса: $\left|Z_s\right| = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}\,.$

Аргумент совокупного импеданса: $\angle Z_s = \tan^{-1}\left(\frac{5}{7}\right) = 35.5^\circ = 0.62\,[\text{rad}].$

Совокупный адмиттанс:
$$Y_s = \frac{1}{\dot{Z}_s} = \frac{1}{7 + 5j} = \frac{7 - 5j}{(7 + 5j)\,(7 - 5j)}$$
$$= \frac{7 - 5j}{49 + 25} = \frac{7 - 5j}{74}.$$

Модуль совокупного адмиттанса: $\left|Y_s\right| = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 5^2}} = \frac{1}{\sqrt{49 + 25}} = \frac{1}{\sqrt{74}}\,.$

Аргумент совокупного адмиттанса:
$$\angle Y_s = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{5}{74}}{\frac{7}{74}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{7}\right)$$
$$= -35.5^\circ = -0.62\,[\text{rad}].$$

Решение задачи 5

Так как совокупный адмиттанс в условиях параллельного соединения равен сумме адмиттансов, то получим следующий результат.

Совокупный адмиттанс: $Y_p = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 5 + 2j + 4 - 9j + 1 + 6j = 10 - j\,.$

Модуль совокупного адмиттанса: $\left|Y_p\right| = \sqrt{10^2 + 1^2} = \sqrt{101}.$

Аргумент совокупного адмиттанса: $\angle Y_p = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{10}\right) = -5.71^\circ = -0.1\,[\text{rad}]\,.$

Совокупный импеданс:
$$Z_p = \frac{1}{Y_p} = \frac{1}{10 - j}$$
$$= \frac{10 + j}{(10 - j)\,(10 + j)}$$
$$= \frac{10 + j}{100 + 1} = \frac{10 + j}{101}\,.$$

Модуль совокупного импеданса: $\left|Z_p\right| = \dfrac{1}{\sqrt{10^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{101}}$.

Аргумент совокупного импеданса: $\angle Z_p = \tan^{-1}\left(\dfrac{\frac{1}{101}}{\frac{10}{101}}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{10}\right)$

$= 5.71^\circ = 0.1\,[\text{rad}].$

Решение задачи 6

❶ $R_3\left(\dfrac{1}{j\omega C_x}+R_x\right) = R_4\left(\dfrac{1}{j\omega C_1}+R_1\right)$

$\dfrac{R_3}{j\omega C_x}+R_3R_x = \dfrac{R_4}{j\omega C_1}+R_4R_1$

Получается, что комплексные числа с обеих сторон уравнения равны, а значит, равны между собой их вещественные и мнимые части. Следовательно, из равенства вещественных частей получаем

$$R_3R_x = R_4R_1, \qquad R_x = \frac{R_4R_1}{R_3},$$

а из равенства мнимых частей получаем

$$\frac{R_3}{\omega C_x} = \frac{R_4}{\omega C_1}$$

$$C_xR_4 = C_1R_3$$

$$C_x = \frac{C_1R_3}{R_4}.$$

Ответ: $C_x = \dfrac{R_3}{R_4}C_1$, $\qquad R_x = \dfrac{R_1}{R_3}R_4$.

❷ $\left(\dfrac{R_3\frac{1}{j\omega C_3}}{R_3+\frac{1}{j\omega C_3}}\right)\left(\dfrac{1}{j\omega C_x}+R_x\right) = R_4\dfrac{1}{j\omega C_1}$

$\left(\dfrac{R_3\frac{1}{j\omega C_3}}{R_3+\frac{1}{j\omega C_3}}\times\dfrac{j\omega C_3}{j\omega C_3}\right)\left(\dfrac{1+j\omega C_xR_x}{j\omega C_x}\right) = \dfrac{R_4}{j\omega C_1}$

$\left(\dfrac{R_3}{j\omega C_3R_3+1}\right)\left(\dfrac{1+j\omega C_xR_x}{j\omega C_x}\right) = \dfrac{R_4}{j\omega C_1}$

Так как числитель правой части уравнения, умноженный на знаменатель левой части, равен числителю левой части уравнения, умноженному на знаменатель правой, то получаем

$$R_3\left(1+j\omega C_x R_x\right)j\omega C_1 = R_4\left(j\omega C_3 R_3+1\right)j\omega C_x .$$

Сократим $j\omega$ в обеих частях уравнения:

$$C_1 R_3\left(1+j\omega C_x R_x\right) = C_x R_4\left(j\omega C_3 R_3+1\right)$$

$$C_1 R_3 + j\omega C_1 R_3 C_x R_x = C_x R_4 + j\omega C_x R_4 C_3 R_3$$

Так как вещественные части обеих частей уравнения равны, то

$$C_1 R_3 = C_x R_4$$

$$C_x = \frac{R_3}{R_4} C_1$$

Так как мнимые части обеих частей уравнения равны, то

$$C_1 R_3 C_x R_x = C_x R_4 C_3 R_3$$

$$C_1 R_x = R_4 C_3$$

$$R_x = \frac{C_3}{C_1} R_4$$

Ответ: $C_x = \dfrac{R_3}{R_4} C_1$, $R_x = \dfrac{C_3}{C_1} R_4$.

Решение задачи 7

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{j\omega C} I_1 + R\left(I_1 - I_2\right) = V \quad ❶ \\ &R\left(I_2 - I_1\right) + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) I_2 = 0 \quad ❷ \end{aligned}\right\}$$

Из ❶ следует: $\left(R + \dfrac{1}{j\omega C}\right) I_1 - R I_2 = V$ ❸

Из ❷ следует: $-R I_1 + \left(2R + \dfrac{1}{j\omega C}\right) I_2 = 0$ ❹

Из ❹ следует: $I_1 = \dfrac{1}{R}\left(2R + \dfrac{1}{j\omega C}\right) I_2$

Подставим результат в уравнение ❸ и получим

$$\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\frac{1}{R}\left(2R + \frac{1}{j\omega C}\right) I_2 - R I_2 = V$$

$$\left\{\frac{1}{R}\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\left(2R + \frac{1}{j\omega C}\right) - R\right\} I_2 = V$$

Умножим обе части на $R(j\omega C)^2$:

$$\left\{R\frac{1}{R}\left(j\omega C\right)\left(R+\frac{1}{j\omega C}\right)\left(j\omega C\right)\left(2R+\frac{1}{j\omega C}\right)-RR\left(j\omega C\right)^2\right\}I=R\left(j\omega C\right)^2V$$

$$\left\{\left(j\omega CR+1\right)\left(j2\omega CR+1\right)-R^2\left(j\omega C\right)^2\right\}I_2=R\left(j\omega C\right)^2V$$

$$\left\{2\left(j\omega CR\right)^2+j\omega CR+j2\omega CR+1+\left(\omega CR\right)^2\right\}I_2=-R\left(\omega C\right)^2V$$

$$\left\{1-2\left(\omega CR\right)^2+\left(\omega CR\right)^2+j\omega CR+j2\omega CR\right\}I_2=-R\left(\omega C\right)^2V$$

$$\left\{1-\left(\omega CR\right)^2+j3\omega CR\right\}I_2=-R\left(\omega C\right)^2V$$

$$I_2=\frac{-R\left(\omega C\right)^2V}{1-\left(\omega CR\right)^2+j3\omega CR}$$

Способ решения 1

Представим эти два уравнения в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} R+\dfrac{1}{j\omega C} & -R \\ -R & 2R+\dfrac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$$

Чтобы найти обратную матрицу, вычислим определитель Det (сокращенное от Determinant).

Для матрицы $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ определитель равен Det = $ad - bc$, поэтому:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det} &= \left(R+\frac{1}{j\omega C}\right)\left(2R+\frac{1}{j\omega C}\right)-R^2 \\
&= \left(\frac{j\omega CR+1}{j\omega C}\right)\left(\frac{j2\omega CR+1}{j\omega C}\right)-R^2 \\
&= \frac{2\left(j\omega CR\right)^2+j\omega CR+j2\omega CR+1}{\left(j\omega C\right)^2}-R^2 \\
&= \frac{1-2\left(\omega CR\right)^2+j3\omega CR+\left(\omega C\right)^2R^2}{-\left(\omega C\right)^2} \\
&= \frac{1-\left(\omega CR\right)^2+j3\omega CR}{-\left(\omega C\right)^2}
\end{aligned}$$

Для матрицы $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ обратная матрица равна $\frac{1}{\mathrm{Det}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, а произведение обратной матрицы на саму матрицу даёт единичную матрицу $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Для матрицы $\begin{bmatrix} R+\frac{1}{j\omega C} & -R \\ -R & 2R+\frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}$ найдём обратную матрицу, умножим на неё обе части исходного уравнения и получим:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{Det}}\begin{bmatrix} 2R+\frac{1}{j\omega C} & R \\ R & R+\frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-(\omega C)^2}{1-(\omega CR)^2+j3\omega CR}\begin{bmatrix} 2R+\frac{1}{j\omega C} & R \\ R & R+\frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Теперь найдём I_2:

$$I_2 = \frac{-(\omega C)^2}{1-(\omega CR)^2+j3\omega CR}RV = \frac{-R(\omega C)^2 V}{1-(\omega CR)^2+j3\omega CR}$$

Способ решения 2

Применим для решения системы линейных уравнений метод Крамера (см. «Разбираемся с помощью манга. Линейная алгебра», стр. 117. Издательство Ohmsha, 2008):

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R+\frac{1}{j\omega C} & V \\ -R & 0 \end{vmatrix}}{\mathrm{Det}}$$

$$= \frac{-(\omega C)^2}{1-(\omega CR)^2+j3\omega CR}\left\{\left(R+\frac{1}{j\omega C}\right)\times 0+RV\right\}$$

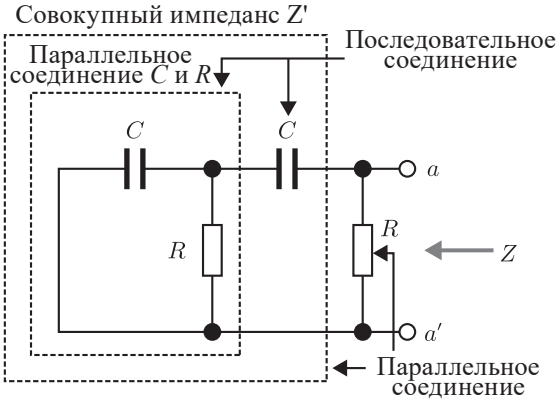
$$= \frac{-R(\omega C)^2 V}{1-(\omega CR)^2+j3\omega CR}$$

Вот такое простое получилось решение.

Матрица $\begin{vmatrix} R+\frac{1}{j\omega C} & V \\ -R & 0 \end{vmatrix}$ в данном случае тоже является определителем.

Решение задачи 8

По данной в задаче схеме видно, что к параллельно соединённым слева *RC* последовательно присоединен *C*, а дальше ещё параллельно присоединён *R*. При последовательном соединении Z_1 и Z_2 совокупный импеданс равен $Z_S = Z_1 + Z_2$, а при параллельном соединении Z_3 и Z_4, совокупный импеданс равен $Z_P = Z_3Z_4/(Z_3 + Z_4)$.



Импеданс электрической ёмкости *C* конденсатора равен $1/(j\omega C)$, поэтому, исходя из предложенной схемы, совокупный импеданс *Z'*, без самого правого *R*, будет равен

$$Z' = \frac{R\dfrac{1}{j\omega C}}{R+\dfrac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{j\omega C} = \frac{R}{j\omega CR+1} + \frac{1}{j\omega C}$$

Следовательно, совокупный импеданс *Z* равен

$$\begin{aligned} Z &= \frac{RZ'}{R+Z'} = \frac{R\left(\dfrac{R}{j\omega CR+1}+\dfrac{1}{j\omega C}\right)}{R+\dfrac{R}{j\omega CR+1}+\dfrac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{R\left(\dfrac{R}{j\omega CR+1}+\dfrac{1}{j\omega C}\right)}{R+\dfrac{R}{j\omega CR+1}+\dfrac{1}{j\omega C}} \times \frac{(j\omega CR+1)\,j\omega C}{(j\omega CR+1)\,j\omega C} \\ &= \frac{R\,(Rj\omega C + j\omega CR + 1)}{j\omega CR\,(j\omega CR+1) + Rj\omega C + j\omega CR + 1} \\ &= \frac{R\,(1+j2\omega CR)}{(j\omega CR)^2 + j\omega CR + j\omega CR + j\omega CR + 1} \\ &= \frac{R\,(1+j2\omega CR)}{1-(\omega CR)^2 + j3\omega CR} \end{aligned}$$

Решение задачи 9

Вычислим совокупный импеданс Z данной электрической цепи. При последовательном соединении совокупный импеданс равен сумме двух импедансов, а при параллельном соединении совокупный импеданс равен произведению двух импедансов, делённому на сумму двух импедансов. Импеданс конденсатора равен $1/(j\omega C)$, поэтому

$$Z = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{R_2 \dfrac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \dfrac{1}{j\omega C_2}} = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{R_2}{j\omega C_2 R_2 + 1}$$

Следовательно: $V_{in} = \left(R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1} + \dfrac{R_2}{j\omega C_2 R_2 + 1} \right) I$

Кроме того, $V_{out} = \left(\dfrac{R_2 \dfrac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \dfrac{1}{j\omega C_2}} \right) I = \dfrac{R_2}{j\omega C_2 R_2 + 1} I$, поэтому

$$\begin{aligned}
\frac{V_{out}}{V_{in}} &= \frac{\dfrac{R_2}{j\omega C_2 R_2 + 1} I}{\left(R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1} + \dfrac{R_2}{j\omega C_2 R_2 + 1} \right) I} \\
&= \frac{\dfrac{R_2}{j\omega C_2 R_2 + 1}}{R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1} + \dfrac{R_2}{j\omega C_2 R_2 + 1}} \times \frac{j\omega C_1 \left(j\omega C_2 R_2 + 1 \right)}{j\omega C_1 \left(j\omega C_2 R_2 + 1 \right)} \\
&= \frac{j\omega C_1 R_2}{R_1 j\omega C_1 \left(j\omega C_2 R_2 + 1 \right) + j\omega C_2 R_2 + 1 + j\omega C_1 R_2} \\
&= \frac{j\omega C_1 R_2}{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega \left(C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_2 \right)}
\end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}
\frac{V_{out}}{V_{in}} &= \left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| \\
&= \left| \frac{j\omega C_1 R_2}{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega \left(C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_2 \right)} \right| \\
&= \frac{\omega C_1 R_2}{\sqrt{\left(1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 \right)^2 + \omega^2 \left(C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_2 \right)^2}}
\end{aligned}$$

Решение задачи 10

Если совокупный импеданс данной цепи обозначить как Z, то так как импеданс катушки равен $j\omega L$, получим

$$Z = j\omega L + \frac{R\dfrac{1}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}}$$

$$= j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR}.$$

Пусть I_L – проходящий через катушку электрический ток. Так как напряжение равно произведению импеданса на силу тока, то

$$E = \left(j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR} \right) I_L.$$

Следовательно:

$$I_L = \frac{E}{j\omega L + \dfrac{R}{1 + j\omega CR}} \quad .$$

$$= \frac{E}{j\omega L + \dfrac{R}{1 + j\omega CR}} \times \frac{1 + j\omega CR}{1 + j\omega CR}$$

$$I_L = \frac{1 + j\omega CR}{j\omega L\,(1 + j\omega CR) + R} E$$

$$= \frac{1 + j\omega CR}{R - \omega^2 CLR + j\omega L} E.$$

Вычислим теперь действующее значение силы тока I_L, проходящего через катушку L, и обозначим его за k':

$$\left| I_L \right| = \left| \frac{1 + j\omega CR}{R - \omega^2 CLR + j\omega L} E \right| = \frac{\sqrt{1^2 + (\omega CR)^2}\,E}{\sqrt{(R - \omega^2 CLR)^2 + (\omega L)^2}} = k'$$

Теперь если $\dfrac{\sqrt{1^2 + (\omega CR)^2}}{\sqrt{(R - \omega^2 CLR)^2 + (\omega L)^2}} = \dfrac{k'}{E} = k$, то

$$\sqrt{1^2 + (\omega CR)^2} = k\sqrt{(R - \omega^2 CLR)^2 + (\omega L)^2}.$$

Возведём в квадрат обе части уравнения:

$$1^2 + (\omega CR)^2 = k^2 \left\{ (R - \omega^2 CLR)^2 + (\omega L)^2 \right\}$$

Преобразуем относительно *R*:

$$\begin{aligned} 1 + (\omega CR)^2 &= k^2 (R - \omega^2 CLR)^2 + k^2 (\omega L)^2 \\ &= k^2 \{R(1 - \omega^2 CL)\}^2 + k^2 (\omega L)^2 \\ &= k^2 R^2 (1 - \omega^2 CL)^2 + k^2 (\omega L)^2 \end{aligned}$$

$$k^2 R^2 (1 - \omega^2 CL)^2 + k^2 (\omega L)^2 - (\omega CR)^2 - 1 = 0$$

$$R^2 \left\{ k^2 (1 - \omega^2 CL)^2 - (\omega C)^2 \right\} + k^2 (\omega L)^2 - 1 = 0$$

Чтобы действующее значение тока IL, проходящего через катушку индуктивности, не менялось в зависимости от *R* (другими словами, чтобы полученное выше равенство выполнялось независимо от значения *R*), нужно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\left.\begin{array}{ll} k^2 (1 - \omega^2 CL)^2 - (\omega C)^2 = 0 & ❶ \\ k^2 (\omega L)^2 - 1 = 0 & ❷ \end{array}\right\}$$

Необходимо, чтобы оба условия выполнялись одновременно

Из ❷ получим, что $k^2 = \dfrac{1}{(\omega L)^2}$. Подставим это в ❶:

$$\frac{1}{(\omega L)^2} (1 - \omega^2 CL)^2 - (\omega C)^2 = 0$$

Умножим обе части на $(\omega L)^2$:

$$\begin{aligned} (1 - \omega^2 CL)^2 - (\omega L)^2 (\omega C)^2 &= 0 \\ 1 - 2\omega^2 CL + (\omega^2 CL)^2 - (\omega^2 CL)^2 &= 0 \\ 1 - 2\omega^2 CL &= 0 \\ 2\omega^2 CL &= 1 \\ \omega L &= \frac{1}{2\omega C} \end{aligned}$$

Ответ: условие, при котором действующее значение тока I_L, проходящего через катушку индуктивности L, не меняется даже при изменении значения переменного напряжения R, будет следующим:

$$\omega L = \frac{1}{2\omega C}.$$

Решение задачи 11

Уравнение без использования комплексных чисел будет выглядеть так:

$$Ri\,(t) + \frac{1}{C}\int i\,(t)\,dt = \sqrt{2}V_m \sin\,(\omega t).$$

Если представить $\sqrt{2}V_{\text{m}}\sin(\omega t)$ в комплексном виде, получим $V = V_{\text{m}}e^{j\omega t}$, а для силы тока $\sqrt{2}I_{\text{m}}\sin(\omega t + \theta)$ в комплексном виде будет $I = I_{\text{m}}e^{(j\omega t+\theta)}$. Таким образом, представленное выше уравнение в комплексном виде можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned}
RI + \frac{1}{C}\int I_m e^{j(\omega t+\theta)}dt &= V \\
RI + \frac{1}{C}I_m e^{j\theta}\int e^{j\omega t}dt &= V \\
RI + \frac{1}{C}I_m e^{j\theta}\,\frac{1}{j\omega}e^{j\omega t} &= V \\
RI + \frac{1}{j\omega C}I_m e^{j\theta}e^{j\omega t} &= V \\
RI + \frac{1}{j\omega C}I_m e^{j(\omega t+\theta)} &= V \\
RI + \frac{1}{j\omega C}I &= V.
\end{aligned}$$

В данном случае при интегрировании мы игнорировали интегральную константу.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

A

Absolute value. 49
Argument 49

C

Complex number. 47

D

Degree. 157
Discriminant 26

I

Imaginary number 7, 11
Imaginary part 47

R

Radian. 157
Radian per second. 171
Real number 45
Real part 47

T

$\tan^{-1}(\omega L/R)$ 183
tan 225° 146
tan 45° 146

А

Алгебраическое
уравнение 167, 178
Аргумент 48, 49
Актангенс 51

Б

Бесконечные
периодические дроби 18
Бытовая
электрическая сеть 168

В

Вектор 49
Вещественная часть 47
Вещественные числа . . . 20, 45
Виды вещественных чисел . 21
Виды чисел 17
Восточная Япония 171
Вычисление квадратного
корня 38

Г

Годовой процент 115
Градусная мера угла 157
Градусы 157

Д

Действующее значение 171, 193
Действующее значение напряжения 171
Действующее значение сетевого напряжения. . . . 193
Действующее значение силы тока 174
Декартова система координат 82
Деление комплексных чисел 151
Дискриминант D. 26
Дифференциальное уравнение 10
Дифференциальное уравнение силы тока 167
Дифференцирование числа Непера 113
Длина дуги окружности ($l = \theta r$) . . . 55, 56
Доказательство формулы Эйлера 106
Дроби и десятичные дроби. 18

З

Закон Ома. 170
Западная Япония. 171

И

Инженерный калькулятор . 146
Иррациональные числа 19
Источник переменного тока 170

К

Катушка 169
Квадратные уравнения. 9
Квартальный процент 116
Комплексная плоскость . . 48, 53
Комплексное число. 47
Косинус 35
Коэффициент самоиндукции169

Л

Леонардо Эйлер. 123

М

Матрица поворота. 126
Мнимая часть 47
Мнимое число 29, 100
Модуль комплексного числа 49
Мотор 168

Н

Напряжение на концах катушки 169
Напряжение на концах резистора 170
Натуральные числа 17
Натуральный логарифм . . . 113

О

Обратная функция 52
Опережение/отставание фазы 193
Определение дифференциала 113
Основание натурального логарифма 102
Основные арифметические операции над комплексными числами 57

П

Переменное напряжение . . 171
Переменный ток 168, 171
Пиковое значение 171
Пиковое значение напряжения 193
Плоскость Гаусса 48
Площадь окружности 19
Площадь сегмента 56
Полугодовой процент 116
Полярная система координат 63, 83
Полярные координаты 150
Последовательное соединение катушки и резистора 170
Постоянная скорость 34
Правило перестановки 58
Правило раскрытия скобок 58, 60
Практическое использование комплексных чисел . . 11, 172
Практическое использование числа Непера 115
Произведение комплексных чисел 143
Прямоугольная система координат 82

Р

Радиан 55, 157
Радианная мера 55, 56,157
Расстояние от начала координат 51
Рационализация 68
Рационализация знаменателя 68
Рациональные числа 18
Ряд Маклорена 107, 108

С

Свойства катушки. 169
Свойства комплексных чисел 48
Свойства степени 109, 128
Свойство дифференцирования функций с *e* 175
Сдвиг фаз 171
Симметричность относительно оси вещественных чисел. . 66
Синус 35
Синусоида 171
Сложные проценты. 115
Сопротивление 170
Сопряженные комплексные числа 63, 64, 152, 179

Т

Тангенс. 35
Теорема о соотношении сторон прямоугольного треугольника 34, 51
Теорема Пифагора. 34
Тригонометрическая функция 123
Тригонометрические формулы сложения 125
Тригонометрические функции комплексного аргумента. . 11

У

Угловая скорость. 171
Угловая частота. 171
Ускорение свободного падения 34, 35
Условие подобия треугольников 34

Ф

Факториал 107
Формула Муавра 109
Формула решения квадратных уравнений . . . 22
Формула Эйлера 11, 99, 101
Функция от времени (*t*) . . . 169

Ц

Целые числа. 17
Циклические явления. 31

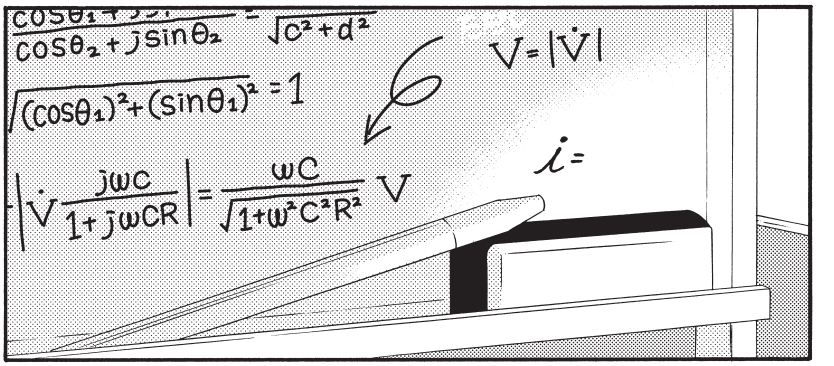
Ч

Число Непера. 100, 102
Числовая прямая 20, 48

Э

Экспоненциальная форма комплексного числа. 110

Книги издательства «ДМК Пресс» можно заказать
в торгово-издательском холдинге «Планета Альянс» наложенным платежом, выслав
открытку или письмо по почтовому адресу:
115487, г. Москва, 2-й Нагатинский пр-д, д. 6А.
При оформлении заказа следует указать адрес (полностью), по которому должны быть
высланы книги; фамилию, имя и отчество получателя.
Желательно также указать свой телефон и электронный адрес.
Эти книги вы можете заказать и в интернет-магазине: **www.a-planeta.ru**.
Оптовые закупки: тел. **(499) 782-38-89**.
Электронный адрес: **books@alians-kniga.ru**.



Оучи Масаси (автор), Ишино Тои (художник)

Образовательная манга
Комплексные числа
Манга

Главный редактор *Д. А. Мовчан*
dmkpress@gmail.com
Перевод *С. Л. Плеханова*
Научный редактор *О. С. Сорокина*
Корректор *Г. И. Синяева*
Верстальщик *А. Ю. Анненков*

Формат 70×100 1/16.
Гарнитура Anime Ace. Печать офсетная.
Усл. п. л. 18,85. Тираж 500 экз.

Веб-сайт издательства www.dmkpress.com